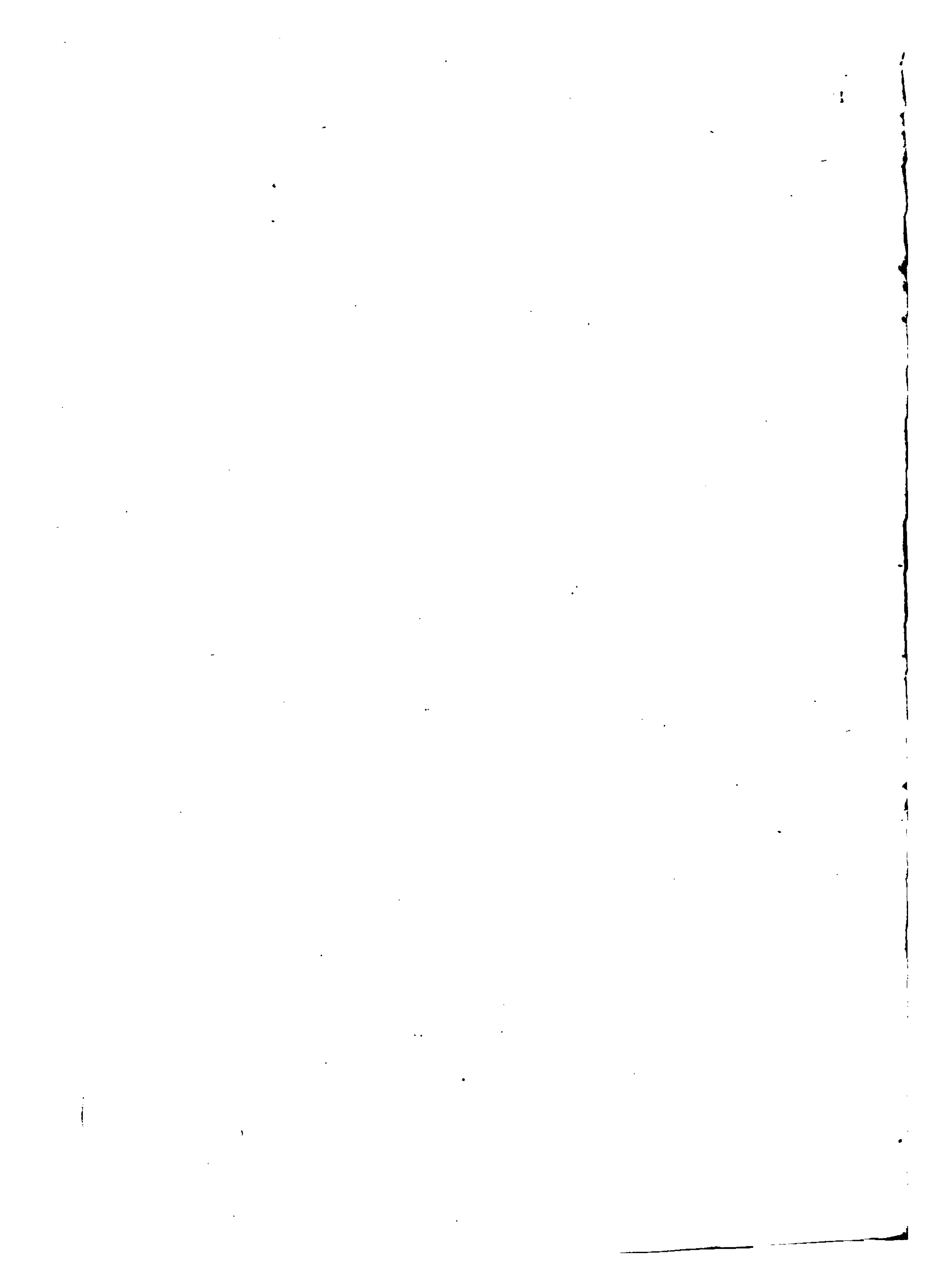

1817
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE



Lucuze, Pedro de

ADVERTENCIAS

PARA LA MEDIDA, Y CALCULO

DE LOS

DESMONTES

O

EXCAVACIONES,

EN TERRENOS IRREGULARES,

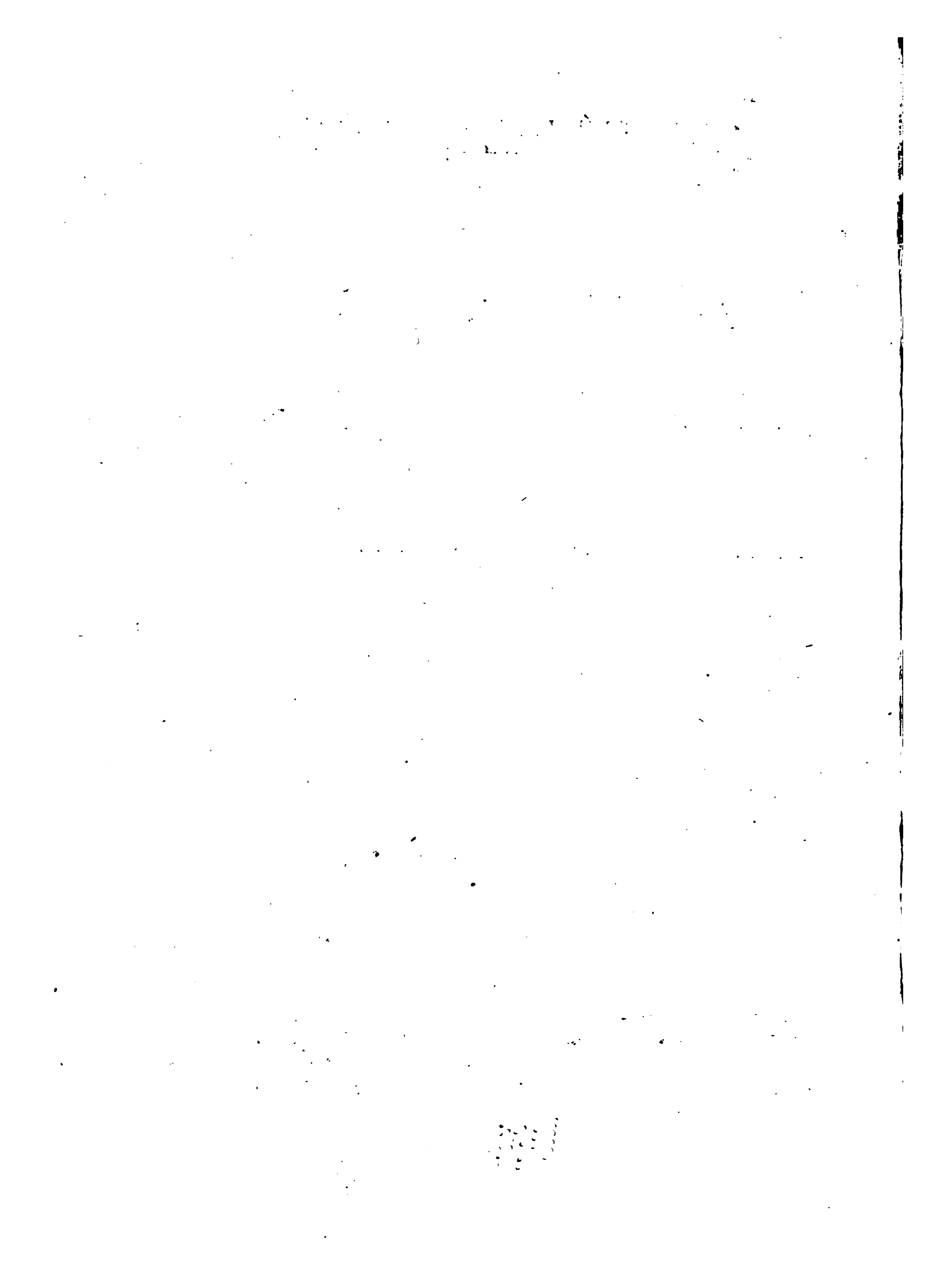
CON UNA REGLA GENERAL

para todos ellos,

DEMOSTRADA, Y AUTORIZADA por la Theoría del Centro de Gravedad particular de cada Cuerpo, y la inteligencia que debe darse à la comunmente usada por los Prácticos, à fin de evitar errores, y aproximarse mas à la verdad.

CON LICENCIA.

En Barcelona: Por Francisco Suriá Impresor, y Librero. Año de 1766.



Aviso del Impresor.

HAbiendo llegado à mis manos un Manuscrito del Brigadiér Don Pedro de Lucuze, Director de la Real, y Militar Académia de Mathematicas establecida en Barcelona (Sugeto bien conocido por su merito, y vasta erudicion en las Mathematicas) sobre el modo de medir, y calcular las grandes Excavaciones, ò Desmontes en Terrenos irregulares; me pareció desde luego que sería de mucha utilidad el imprimirlo en favor de todas aquellas Personas, que instruídas en los principios de Arithmética, y Geometría, tienen obligacion de asistir à las Obras de Fortificacion, ù de otra naturaleza, como Ministros de la Real Hacienda, Ingenieros, Asentistas, Arquitectos, &c.

De

De mi parte lograré la mayor satisfaccion, si este corto obsequio, que ofrezco à los Interesados en esta materia, puede contribuir al mejor servicio de S. M., y bien del Público.

✠

ADVERTENCIAS

PARA EL CALCULO, Y MEDIDA de Excavaciones, ò Desmontes en Terrenos irregulares.

INTRODUCCION.



AS situaciones que ordinariamente se eligen para Plazas de Guerra, y Obras de Fortificacion son en Terrenos irregulares, cuya natural disposicion ofrece ventajas para la Defensa; por consiguiente es muchas veces indispensable hacer grandes, y costosos Desmontes, ò Excavaciones.

Estas Obras se egecutan de varios modos: Los principales son tres, ò por Administracion, ò por Destajo, ò por Impresarios.

En el primer caso, siendo de cuenta de la Real Hacienda, se forma un tantéo de su importe; y es suficiente el Cálculo prudencial de las Excavaciones, à fin de formar la Idéa de la magnitud, tiempo, y gasto, que puedan ocasionar.

Quando se hacen por Destajo, esto es, ajustando por un tanto algun particular Desmonte con Sugeto que lo toma à su cargo, basta tambien la prudente estimacion, y el conocimiento práctico del Trabajo, y del tiempo en que se pueda concluir, paraque el Destajista logre moderada utilidad.

Pero quando estas Obras se disponen por Asiento, se hace con el Impresario una Contrata, en que se expresan las Condiciones con que se obliga à la construccion de ellas, siendo de cuenta de la Real Hacienda la satisfaccion de las Varas, ò Pies cúbicos, que por la Medicion del Desmonte resulten egecutados.

De

De aquí se sigue, que quando es considerable el importe de la Excavacion, se hace preciso, que en la Medicion, y Cálculo se observe la posible exactitud, para no perjudicar à la Real Hacienda, ni al Impresario.

Todos saben, que el Cálculo se ha de fundar en reglas de Geometría, para no exponerse à errores en perjuicio de la verdad, del honor proprio, y de la conciencia: Ni se ignora, que los Terrenos, ò Cuerpos muy irregulares, no pueden medirse con aquella exactitud, y precision que pide el rigor Geométrico; pero todos deben confesar, que son indispensables las luces de la Arithmética, y Geometría, y que el acierto consiste en dividir el Terreno irregular en tales partes, que no difieran sensiblemente de aquellos Sólidos que se sujetan à la Medida Geométrica, como son los Prismas, y las Piramides, paraque el agregado de los Sólidos particulares se aproxime tanto à la ver-

dadera solidéz del Terreno, que la diferencia sea despreciable; y en este sentido se dice exacta la Medicion.

A la vista de un Terreno muy irregular se ofrece luego la dificultad, y tédio de un Cálculo prolíjo, especialmente al poco instruído, que sin conocimiento toma un partido poco trabajoso, y menos seguro, de que pueden resultar graves daños; ni puede disculparse, siguiendo algun méthodo que haya visto practicar, si no se asegura del fundamento de la regla.

Los Escritores de Fortificacion, y Arquitectura pasan esta materia con tal silencio, como si fuera de poca importancia; sin duda persuadidos, que las reglas establecidas en la Geometría para los Cuerpos mensurables dan la suficiente luz para la práctica en Terrenos muy irregulares.

Esta consideracion, y el ver que se siguen generalmente reglas, que solo

solo son aplicables en casos particulares, ha dado motivo à formar estas Advertencias, Avisos, y Reflexiones, para establecer un méthodo seguro, facil, y practicable, evitando los perjuicios que puedan seguirse en la Medída de estos Sólidos.

Para mayor claridad se dividirá el Discurso en tres Partes. En la primera, se tratará de la regla universal que conviene observar en toda especie de Terrenos: En la segunda, se hará aplicacion del centro de gravedad de los Cuerpos à la regla establecida: Y en la tercera, se dará la inteligencia que corresponde à la regla comunmente usada por los Prácticos, para evitar los errores, y aproximarse à la verdad.

Supongo al Lector instruído en los Principios de Geometría, y Arithmética vulgar, y literal, y en la inteligencia de los Signos, que ordinariamente se usan para indicar la Adicion, Substraccion, Multiplicacion, Divi-

Division, Igualdad, Proporcion, &c.; y en favor de los que no tienen bastantes luces, y deben concurrir à la Medicion, y confrontacion de los Cálculos, se pondrá algun Egemplo numérico, para mayor explicacion de los casos particulares.

PARTE PRIMERA.

REGLA GENERAL PARA TODA especie de Terrenos.

§. I.

ANtes de empezar el Desmonte, ò Excavacion de un Terreno, que haya de servir para la construccion de alguna Obra de Fortificacion, se han de tener los Planos, y Perfiles del Proyecto, que examinados sobre el Terreno mismo, manifestarán lo que conviene desmontarse, y las concavidades que deben llenarse con tierras transportadas de otra parte.

§. II.

§. II.

Señalado todo lo que importa desmontarse, la primera diligencia es reconocer atentamente la superficie del Terreno, para dividirla en muchas Superficies Planas, que juntas no se distingan sensiblemente de la natural; y de esto depende principalmente la exactitud del Cálculo.

§. III.

Para conseguirlo se notarán varios puntos sobre el Terreno, en todas las partes mas elevadas, en las mas bajas, y en otras diversas, observando cuidadosamente, que à lo menos por cada tres puntos pase un Plano, que no difiera sensiblemente de la superficie natural; de donde se sigue, que la determinacion de los puntos necesarios à la mas adequada division, y formacion de los Cálculos, depende precisamente de la disposicion del Terreno, y no de eleccion arbitraria.

§. IV.

§. IV.

Señalados los puntos, se toma en Escala de competente magnitud el Plano exacto de todos, despues se hallan por medio de la nivelacion las diferentes alturas que tienen entre sí; y comparadas estas con los Perfiles de la Obra, es facil determinar la altura correspondiente à cada punto en el Sólido que debe desmontarse, ya se termíne en lo inferior por Plano Horizontal, como sucede regularmente, ò por Plano Inclinado, si la Obra lo requiere.

§. V.

En el Plano Horizontal ya levantado, de los puntos elegidos, y nivelados se tiran Rectas de uno à otro, para indicar los Triangulos, ò Superficies Planas, correspondientes à las señaladas sobre el Terreno: Estas Rectas serán las comunes Secciones, que en el Plano Horizontal hacen los Verticales que pasan por cada dos puntos notados; y las alturas conoci-

das

das por el Nivél, son las comunes Secciones de los Planos Verticales, que comprehenden los Sólidos particulares.

§. VI.

Qualquier Triangulo en el Plano Horizontal terminado por tres alturas, llamarémos *Triangulo principal*, ò *Base principal*; porque sirve de Base al Sólido particular, sin hacer atencion al Triangulo superior, ni aun al inferior, quando son inclinados al Horizonte, respecto que solo se necesita la Seccion Horizontal, ò Perpendicular à las alturas: Lo mismo se entiende si por los extremos de 4, 5, ò mas alturas pasáre un Plano natural; porque siempre debe tomarse la Seccion Horizontal por la *principal Base*.

§. VII.

De la division de la superficie del Terreno en partes que no difieran de Superficies Planas, pueden resultar las tres especies de Sólidos Piramides, Prismas, y freqüentemente Pris-

mas Truncados. Llamanse así, porque las Bases opuestas son entre sí inclinadas, ò desiguales, à distincion del Prisma Entero, en quien son iguales, y paralelas; de que se sigue, que en el Prisma Truncado todos los Planos laterales serán Trapecios, si las alturas fueren desiguales.

§. VIII.

Para mayor claridad, represente AN una porcion de Terreno, ò Montaña, que importa allanar para tener el Plano ABC, ya sea Horizontal, ò ya Inclinado. Los puntos notados en la superficie del Terreno se indícan con letras mayúsculas, y los señalados con las minúsculas son las proyecciones formadas en el Plano ABC por las Verticales, que caen de los puntos superiores.

Fig. 1.

Supongase que por los tres puntos A, B, D pasa el Triangulo ABD, que no difiere sensiblemente del Terreno natural, y que à este modo están dispuestos los Triangulos DEF, FDG, &c.;

&c.; desuerte, que toda la superficie del Terreno se halla dividida en Triangulos, y tal vez con alguna Figura multilatera, si por muchos puntos puede pasar un mismo Plano. Concibase por cada uno de estos puntos perpendiculares al Horizonte D*d*, E*e*, F*f*, &c., cuyas alturas deben tenerse por la nivelacion hecha sobre el Terreno: El Plano ABC se supone Horizontal, ò levantado con la Plancheta, en donde se tienen los *Triangulos principales*, indicados con lineas de puntos para la Medída de los Sólidos particulares.

§. IX.

Entre estos se tiene la Piramide Erecta DAB*d*, cuyo Vertice es D, y su Base el Triangulo AB*d*; pues las dos alturas correspondíentes à los puntos A, y B son cero.

Tambien se tiene la Piramide Yacente ADG*gd*, cuyo Vertice es A, y su Base el Trapecio D*g*, porque es cero la altura en A. Asimismo es Pirami-

ramide Yacente BDE*ed*, cuyo Vertice es B, y su Base el Trapecio D*e*: Tambien lo es CLN*nl*, cuyo Vertice es C, y su Base el Trapecio L*n*.

Todos los demás Sólidos, cuyas Bases tienen tantas alturas como Angulos, son Prismas Enteros, si la Base superior es igual, y paralela à la inferior; ò Prismas Truncados, si las Bases son entre sí inclinadas.

§. X.

Con esto se percibe facilmente, que los Terrenos muy irregulares necesitan de mayor número de divisiones, ò Triangulos, paraque los muchos Planos diversamente inclinados se conformen con la superficie natural.

§. XI.

Todas las precauciones, y advertencias explicadas deben tenerse antes de empezar la Excavacion, ò Desmonte; porque las Tierras movidas toman mayor extension, y por esto se han de calcular, segun el espacio que ocupan, antes de moverse.

§.XII.

§. XII.

Sucede algunas veces, que se hace el Cálculo para una Excavacion de Tierras, que deben transportarse à otro lugar en donde se necesitan; y que adelantando el Trabajo se encuentra Piedra, ò Peña, que no se pretende mover. En este caso se calcúla todo el espacio, despues se mide la Piedra, ò Peña; y restando este Sólido del total, se tiene la cantidad que corresponde à la Tierra movida.

§. XIII.

Prevenido ya todo lo necesario para la formacion de los Cálculos, se empieza el Desmonte, dexando à distancias competentes pequeñas Piramides, que llaman *Damas*, ò *Testigos*; y sirven para conocimiento de la Excavacion hecha, y de la que falta que egecutar: Su proprio lugar es en todas las alturas D*d*, E*e*, F*f*, &c., ya señaladas sobre el Terreno para tener las que van resultando, segun se adelanta el Desmonte, ò se profunda

la

la Excavacion: Asimismo se deben conservar señales en todos los puntos del contorno immediato, como en A, B, &c., de donde salieron las Lineas que formaron los Triangulos; y ultimamente se han de señalar las Direcciones de las mismas Lineas, para conservar la idéa del Terreno natural, y la figura de los Sólidos, en que se habia dividido. Esta precaucion es muy importante, así porque algun accidente puede obligar à suspender el Trabajo, como porque ya concluído, puede repetirse la Medicion, y el Cálculo con la misma exactitud que antes: lo que sería imposible si faltase, ò se alterase algun Testigo, Señal, ò Direccion de Linea.

§. XIV.

El modo de medir las especies de Sólidos expresados, que resultan de la division hecha sobre la superficie del Terreno, se comprehende por una Formula general, facil, y breve, que tiene la excelencia de incluir los ca-

casos particulares de la Piramide, del Prisma, y del Prisma Truncado.

§. XV.

Para hallar esta Formula sea el Prisma Truncado D*dfg*, cuya Base principal es el Triangulo *dfg*, que se supone perpendicular à las tres alturas D*d*, G*g*, F*f*. Sea *ds* la altura del Triangulo, ò perpendicular à la Base *fg*, que tambien será perpendicular al Plano G*f*. Por el extremo D de la menor altura D*d* pase el Plano DPQ, que será igual, y paralelo à la Base *dfg*, y dividirá al Sólido en un Prisma Entero D*fg*, y una Piramide Yacente, que tiene su Vertice en D, y su Base es el Quadrilatero, ò Trapecio GQ; y la altura de esta Piramide será DS = *ds*. Fig. 2.

Sea $Dd = a$,
$Gg = b$,
$Ff = c$,
$fg = d$,
$ds = DS = h$,

será el Triangulo principal $\frac{dh}{2}$, y el

Pris-

Prisma Triangular $= \frac{adh}{2}$. Tambien GP será $b - a$, FQ $= c - a$: luego el Trapecio GQ $= (b + c - 2a)\frac{d}{2}$, que multiplicado por el tercio de su altura $= \frac{h}{3}$, dará la solidéz de la Piramide $= (b + c - 2a)\frac{dh}{6} = \frac{1}{6}(bdh + cdh - 2adh)$; añadase el Prisma $\frac{adh}{2} = \frac{3adh}{6}$, y será el Prisma Truncado $\frac{1}{6}(adh + bdh + cdh)$ $= \frac{1}{3}(a + b + c)\frac{dh}{2}$, que es la Formula general que se busca.

La expresion $\frac{1}{3}(a + b + c)\frac{dh}{2}$ quiere decir, que se ha de multiplicar la Base, ò Triangulo principal por el tercio de las tres alturas, para tener la solidéz del Prisma Triangular Truncado.

§. XVI.

Quando las tres alturas Dd, Gg, Ff son desiguales, el Quadrilatero GQ será Trapecio: pero si las dos mayores Gg, Ff son iguales, la Base GQ será un Rectangulo; y en eſte caso $b = c$,

$b=c$, $b-a=c-a$, y $(b-a)d$ será el Rectangulo GQ; la Piramide será $(b-a)d\times\frac{b}{3}=\frac{1}{3}(bdh-adh)=\frac{1}{6}(2bdh-2adh)$; y añadiendo el Prisma $\frac{adh}{2}=\frac{3adh}{6}$, dará el Prisma truncado $\frac{1}{6}(adh+2bdh)$ $=\frac{1}{3}(a+2b)\frac{dh}{2}$, que es la misma Formula, porque $\frac{1}{3}(a+2b)=\frac{1}{3}(a+b+c)$.

§. XVII.

Si las dos alturas menores Dd, Gg Fig. 3. fueren iguales, en este caso $b=a$, y la Formula general $\frac{1}{3}(a+b+c)\frac{dh}{2}$ queda reducida à esta $\frac{1}{3}(2a+c)\frac{dh}{2}$; y el Prisma truncado se compone del Prisma Df, y de la Piramide triangular DGQF, que tiene por Base el Triangulo DGQ $=dgf$, y su altura FQ $=c-a$: luego el Sólido será $\frac{1}{3}(c-a)\frac{dh}{2}=\frac{1}{6}(cdh-adh)$; y añadiendo el Prisma $\frac{adh}{2}=\frac{3adh}{6}$, se tendrá el Prisma truncado $\frac{1}{6}(2adh+cdh)=$ $\frac{1}{3}(2a+c)\frac{dh}{2}$.

§. XVIII.

Quando las tres alturas fueren iguales, el Sólido será Prisma entero; y en este caso $a + b + c = 3a$: luego la Formula general $\frac{1}{3}(a + b + c)\frac{dh}{2}$ reducida será $\frac{3a}{3} \times \frac{dh}{2} = \frac{adh}{2}$, valor del Prisma, cuya altura es a, y su Base principal $\frac{dh}{2}$.

§. XIX.

Hasta aquí se ha supuesto en el Prisma truncado, que una de las Bases es horizontal, ò perpendicular à las tres alturas; pero igualmente conviene la Formula general al Prisma truncado, cuyas Bases no siendo paralelas ninguna de ellas es horizontal, porque en el Prisma ABFD sean los Triangulos ACE, BDF diversamente inclinados: por qualquiera parte de la altura cortese el Prisma con el Plano horizontal dfg, que será el Triangulo, ò Base principal, y quedará el Prisma total dividido en dos Prismas truncados Af, fB; y por lo de-

Fig. 4.

demostrado se tendrá el Prisma $Af =$ $\frac{1}{3}(Ad + Cg + Ef)\frac{dh}{2}$, y tambien $fB =$ $\frac{1}{3}(dB + gD + fF)\frac{dh}{2}$: luego todo el Prisma será $\frac{1}{3}(AB + CD + EF)\frac{dh}{2}$; esto es, la Base horizontal multiplicada por el tercio de las tres alturas, dará la solidéz.

§. XX.

Tambien conviene la misma Formula à las Piramides; porque lo primero, si una de las tres alturas es cero, como sucede en el punto C de la Piramide yacente $ClNn$, en la Formula se supone $a = 0$; y reducida es $\frac{1}{3}(0 + b + c)\frac{dh}{2} = \frac{b + c}{3} \times \frac{dh}{2}$, que expresa la solidéz: Porque supuesto $Ll = b$, $Nn = c$; la horizontal $ln = d$, $Cs = h$ será el Trapecio $Ln = \frac{b + c}{2} \times d$, que multiplicado por el tercio de la altura de la Piramide $Cs = \frac{h}{3}$, dará el Sólido $\frac{1}{6}(bdh + cdh) = \frac{b + c}{3} \times \frac{dh}{2}$ del mismo

Fig. 5.

modo, que por la Formula general $\frac{1}{3}(0 + b + c)\frac{dh}{2}$.

§. XXI.

Lo segundo, si dos alturas son cero, como en la Piramide erecta ABDd, se supondrá en la Formula general $a = 0$, $b = 0$; y reducida será $\frac{1}{3}(0 + 0 + c)\frac{dh}{2} = \frac{c}{3} \times \frac{dh}{2}$, que es el valor de la Piramide, cuya Base principal es $\frac{dh}{2}$, y su altura es c.

Fig. 6.

§. XXII.

En el Terreno, que hace algun pendiente, puede un mismo Plano FGHYL pasar por los extremos de muchas alturas: En este caso se elige à discrecion una de ellas como AL, y pasando los Planos AG, AH, quedará el Prisma poligono truncado dividido en Prismas triangulares truncados; y hallando separadamente la solidéz de cada uno *, la suma de todos dará la solidéz del Prisma poligono.

Fig. 7.

* §. 15.

§. XXIII.

§. XXIII.

Quando un mismo Plano DF pasa por quatro alturas, y la Base principal CH es un Trapecio, se dividirá el Sólido por un Plano diagonal AE, y los Triangulos, en que se divide la Base, tendrán una altura comun entre las paralelas.

Fig. 8. Num. 1.

Sea $AB = a$,
$CD = b$,
$GE = c$,
$HF = e$,
$CG = d$,
$AH = f$,

y la distancia entre las paralelas $= h$.

Se tendrá el Prisma triangular *, cuya Base es el Triangulo ACG, $= \frac{1}{3}(a + b + c)\frac{dh}{2}$: Asimismo el que tiene por Base al Triangulo AHG será $\frac{1}{3}(c + e + a)\frac{fh}{2}$; y el agregado dará la solidéz del Prisma truncado, que tiene por Base al Trapecio.

* §. 15.

Lo mismo se hallará si la division se hace por el Plano diagonal DH, pues

Num. 2.

pues el Prisma triangular, que tiene por Base al Triangulo CGH, dará $\frac{1}{3}(b+c+e)\frac{db}{2}$; y el que tiene por Base al Triangulo ACH será $\frac{1}{3}(e+a+b)\frac{fh}{2}$, cuya suma dará la misma solidéz, que por la division antecedente.

§. XXIV.

Fig. 9. Quando un mismo Plano LS pasa por quatro alturas, y la Base principal KV es Rectangulo, resulta la Formula menos compuesta, ò, por mejor decir, los dos Prismas triangulares truncados, en que puede dividirse el total, se calcúlan de una vez, tomando el tercio de las seis alturas, que se multiplíca por una de las Bases triangulares iguales.

Supongase dividido el Sólido por *Num. 1.* el Plano diagonal YR en dos Prismas triangulares truncados, cuyas Bases son los Triangulos Rectangulos iguales YKT, TVY; y suponiendo KT = d, y la latitud de la Base, ò distancia entre las Paralelas YK = h, qualquiera

ra de los dos Triangulos, ò Bases será $\frac{dh}{2}$. Sea la altura YM = a,

KL = b,

TR = c,

SV = e:

luego el Prisma, que tiene por Base al Triangulo YKT, será * $\frac{1}{3}(a+b+c)\frac{dh}{2}$; y el que tiene la Base TVY dará $\frac{1}{3}(c+e+a)\frac{dh}{2}$: luego el total será $\frac{1}{3}(a+b+c+c+e+a)\frac{dh}{2}=\frac{1}{3}(2a+b+2c+e)\frac{dh}{2}$; ò bien $\frac{1}{6}(2a+b+2c+e)\,dh$, tomando por Base al Quadrilatero YKTV.

* §. 15.

El mismo Sólido se hallará haciendo la division por el otro Plano diagonal KS, aunque con distintas expresiones: porque el Prisma que tiene por Base al Triangulo KTV dará * $\frac{1}{3}(b+c+e)\frac{dh}{2}$, el que tiene la Base VYK será $\frac{1}{3}(e+a+b)\frac{dh}{2}$; y la suma de los dos es $\frac{1}{3}(b+c+e+e+a+b)\frac{dh}{2}=\frac{1}{3}(2b+c+2e+a)\frac{dh}{2}$, ò bien $\frac{1}{6}(2b+c+2e+a)\,dh$, tomando la Base quadrilatera YKTV.

Num. 2.

* §. 15.

§. XXV.

§. XXV.

De aquí se sigue lo primero, que quando la Base es rectangula, y por el extremo de las quatro alturas pasa un mismo Plano, la suma de las dos alturas diametralmente opuestas es igual à la suma de las otras dos; esto es, YM + TR = KL + VS, ò bien $a+c=b+e$: porque siendo $\frac{1}{3}(2a+b+2c+e)\frac{db}{2}=\frac{1}{3}(2b+c+2e+a)\frac{db}{2}$, será $2a+b+2c+e=2b+c+2e+a$; y quitando de entrambas partes $a+b+c+e$, quedará $a+c=b+e$.

§. XXVI.

Se infiere tambien en el mismo caso, que siendo $a+c=b+e$, substituyendo $a+c$ en lugar de $b+e$ en la expresion $\frac{1}{3}(2a+b+2c+e)\frac{db}{2}$, se tendrá $\frac{1}{3}(3a+3c)\frac{db}{2}=(a+c)\frac{db}{2}$. Por igual razon, substituyendo $b+e$ en lugar de $a+c$ en la expresion $\frac{1}{3}(2b+c+2e+a)\frac{db}{2}$, se tendrá $\frac{1}{3}(3b+3e)\frac{db}{2}=(b+e)\frac{db}{2}$; de don-

donde sale la regla brevisima para hallar la solidéz, que consiste en multiplicar la Base triangular $\frac{db}{2}$ por la suma de dos alturas diagonalmente opuestas $a + c$, ò bien $b + e$; ò tambien multiplicar la Base rectangula db por la semi-suma de dos alturas diametralmente opuestas, porque $(a + c)\frac{db}{2} = \frac{1}{2}(a + c)\,db$.

§. XXVII.

Asimismo siendo $\frac{1}{2}(a + c) = \frac{1}{2}(b + e)$, será $\frac{1}{2}(a + c) = \frac{1}{4}(a + b + c + e)$: luego $\frac{1}{2}(a + c)\,db = \frac{1}{4}(a + b + c + e)\,db$; esto es, la Base principal rectangula multiplicada por el quarto de las quatro alturas dará la solidéz del Prisma truncado, quando por los extremos de las quatro alturas pasa un mismo Plano.

§. XXVIII.

Se ha visto *, que quando la Base principal es un Trapecio, ò un Paralelogramo, y por los extremos de las quatro alturas pasa un mismo Plano, es arbitraria la division del Sólido en

* §§. 23. y 24.

Prismas triangulares, cortandolo por qualquiera de las dos Diagonales, pues la suma siempre dará la misma solidéz en el Prisma total; pero quando no pasa un mismo Plano por los extremos de las quatro alturas, se ha de atender à la diagonal, que se ajusta sobre el Terreno, ò bien à los dos Triangulos superiores, que se acomodan à la superficie natural; porque en este caso los dos Prismas triangulares no forman un Prisma total truncado.

§. XXIX.

Quando la Base principal es un Poligono regular, lo que sucede rara vez, y se termínan en un mismo Plano todas las alturas de los Angulos, se suman estas, y divididas por el número de ellas, resultará al Cociente una altura comun, por la qual multiplicada la Base principal dará la solidéz.

Para demostrar esta regla servirá el siguiente Lema.

§.XXX.

§. XXX.

LEMA. En qualquier Trapecio ABDF, si entre los lados paralelos AB, DF se tira la paralela HC, el Rectangulo de CH en AF será igual à los dos hechos de AB en HF, y de FD en AH; esto es, $CH \times AF = DF \times AH + AB \times HF$. Fig. 10.

Por los puntos C, B, D tirense paralelas à AF, y perfeccionese el Rectangulo FP.

Demostr. Los Complementos CQ, CP son iguales; y añadiendo à cada uno los dos Paralelogramos HQ, HM, será el Paralelogramo $FM = HQ + HP$; esto es, $CH \times AF = AB \times HF + DF \times AH$, que es lo que &c.

§. XXXI.

COROL. I. Si se dan los lados AB, FD, y la razon de los Segmentos AH, HF, ò bien de los BC, CD, que es la misma, se tendrá conocido $CH = \frac{AB \times HF + DF \times AH}{AF}$.

Así, si $AB = a$, $FD = b$, y $AH : HF :: p : q$, será $CH = \frac{aq + bp}{p + q}$.

§. XXXII.

COROL. II. Si $AH = HF$, ò bien $BC = CD$; esto es, $p = q$, será CH medio arithmético entre AB, y FD, ò bien $CH = \frac{a + b}{2}$.

§. XXXIII.

* §. 27. Hemos dicho *, que la solidéz del Prisma truncado se tiene multiplicando la Base rectangula por el quarto de las quatro alturas en los Angulos, y esto mismo conviene al de Base quadrada.

§. XXXIV.

Quando tiene por Base un Pentagono regular ABCDE, se tendrá la solidéz multiplicando la Base por el quinto de las cinco alturas AP, BR, CS, DT, EV. *Fig. 11.*

En el centro O (vertice comun de los Triangulos iguales de la Base) levantese la perpendicular OX, que será paralela à las alturas; por la qual;

y

y cada una de éstas pasen los Planos Trapecios AQ, BL, CM, DN, EZ, que dividirán por medio à cada uno de los lados del Poligono, así superior, como inferior.

Supongase qualquier Triangulo AOB $= \frac{dh}{2}$, será toda la Base $\frac{5dh}{2}$.

Asimismo sea AO : OF :: $m : n$, y lo mismo en los demás Trapecios.

Supongase $\begin{cases} AP = a, \\ BR = b, \\ CS = c, \\ DT = e, \\ EV = f, \\ OX = z, \end{cases}$ Será * $\begin{cases} FQ = \frac{c+e}{2} \\ GL = \frac{e+f}{2} \\ HM = \frac{f+a}{2} \\ YN = \frac{a+b}{2} \\ KZ = \frac{b+c}{2} \end{cases}$ * §. 32.

Luego * se tendrá en los Trapecios $\begin{cases} AQ \ldots an + (\frac{c+e}{2})m = z(m+n) \\ BL \ldots bn + (\frac{e+f}{2})m = z(m+n) \\ CM \ldots cn + (\frac{a+f}{2})m = z(m+n) \\ DN \ldots en + (\frac{a+b}{2})m = z(m+n) \\ EZ \ldots fn + (\frac{b+c}{2})m = z(m+n) \end{cases}$ * §. 30.

y

y la suma $(a+b+c+e+f)n+(a+b+c+e+f)m=5z(m+n)$; esto es $(a+b+c+e+f)\times(m+n)=5z(m+n)$; y partiendo todo por $m+n$, se tendrá $a+b+c+e+f=5z$.

Tambien el agregado de los cinco Prismas triangulares, que componen el total, se tiene *, que es igual à $\frac{dh}{2}\left(\frac{1}{3}(a+b+z)+\frac{1}{3}(b+c+z)+\frac{1}{3}(c+e+z)+\frac{1}{3}(e+f+z)+\frac{1}{3}(f+a+z)\right)$; esto es, $\frac{dh}{2}\times\frac{1}{3}(2a+2b+2c+2e+2f+5z)$.

* §. 15.

Y substituyendo $a+b+c+e+f$ en lugar de $5z$, se tendrá $\frac{dh}{2}\times\frac{1}{3}(2a+2b+2c+2e+2f+a+b+c+e+f)=\frac{dh}{2}\times\frac{1}{3}(3a+3b+3c+3e+3f)=\frac{dh}{2}(a+b+c+e+f)$, ò bien $\frac{5dh}{2}\times\frac{1}{5}(a+b+c+e+f)$: luego toda la Base multiplicada por el quinto de las cinco alturas dará la solidéz del Prisma, cuya Base es un Pentagono regular.

Por el mismo méthodo se hallará, que en el Prisma truncado, que tiene por

por Base un Poligono regular de número impár, como 7, 9, 11, &c., la solidéz resulta de la multiplicacion de la Base por el $\frac{1}{7}$, el $\frac{1}{9}$, el $\frac{1}{11}$, &c. de las alturas de los Angulos.

§. XXXV.

Si la Base del Prisma es un Hexagono regular ABCDEF, el sexto de las seis alturas de los Angulos multiplicado por la Base dará la solidéz. Fig. 12.

En el centro O (vertice comun de los seis Triangulos iguales de la Base) levantese la perpendicular OX, que se hallará en los Trapecios verticales AY, BL, CM.

Sea qualquier Triangulo AOB $= \frac{db}{2}$, será toda la Base $3db$.

$$\text{Supongase} \cdots \begin{cases} AP = a, \\ BH = b, \\ CK = c, \\ DY = e, \\ EL = f, \\ FM = g, \\ OX = z. \end{cases}$$

En

* §. 32. En el Trapecio AY, será * . . $z=\frac{a+e}{2}$

En el Trapecio BL . . . . $z=\frac{b+f}{2}$

Y en el Trapecio CM . . . . . $z=\frac{c+g}{2}$

Luego . . . . . . $3z=\frac{1}{2}(a+b+c+e+f+g)$

Y . . . . $6z=a+b+c+e+f+g$.

Asimismo el agregado de los seis

* §. 15. Prismas triangulares es * $\frac{dh}{2}\times\left(\frac{1}{3}(a+b+z)+\frac{1}{3}(b+c+z)+\frac{1}{3}(c+e+z)+\frac{1}{3}(e+f+z)+\frac{1}{3}(f+g+z)+\frac{1}{3}(g+a+z)\right)$; esto es, $\frac{dh}{2}\times\frac{1}{3}(2a+2b+2c+2e+2f+2g+6z)$.

Y substituyendo $a+b+c+e+f+g$ en lugar de $6z$, se tendrá $\frac{dh}{2}\times\frac{1}{3}(3a+3b+3c+3e+3f+3g)=\frac{dh}{2}(a+b+c+e+f+g)$, ò bien $3dh\times\frac{1}{6}(a+b+c+e+f+g)$: luego toda la Base multiplicada por el sexto de las seis alturas dará la solidéz del Prisma, cuya Base es un Hexagono regular.

Igualmente se hallará, que en el Prisma truncado, que tiene por Base un Poligono regular de lados en número

mero par, como 8, 10, 12, &c., se tendrá la solidéz multiplicando la Base por el $\frac{1}{8}$, el $\frac{1}{10}$, el $\frac{1}{12}$, &c. de las alturas de los Angulos.

Estas Advertencias son suficientes à explicar las reglas con què debe calcularse el espacio de una Excavacion, ò Desmonte, dividiendolo con Planos verticales en Prismas, y Piramides, que no difieran de la figura del Terreno natural: Pasémos ahora à poner algunos Egemplos numéricos, para mayor claridad, è inteligencia de los que no están bien instruídos en las expresiones literales.

§. XXXVI.

EGEMP. I. Supongase, que entre los Sólidos particulares que componen el total se ha de calcular el Prisma truncado $DdgF$; y se tienen conocidas $gf = 24$ pies, base del Triangulo horizontal, y su altura $ds = 32$. Fig. 2.

Sean las alturas del Sólido $\begin{cases} Dd = 17 \\ Gg = 18 \\ Ff = 22 \end{cases}$

Lo primero, multiplicando 24 por 32, se tendrá el producto 768; y tomando la mitad, será la base triangular de 384 pies quadrados.

Lo segundo, sumense las alturas, y se hallará 57 pies, cuyo tercio es 19, por la altura comun del Sólido; y multiplicando la base 384 por 19, se tendrá la solidéz del Prisma de 7296 pies cúbicos.

	Alturas.	
24	17	384
32	18	19
48	22	3456
72	57	384
768	*Su tercio.* 19	7296
Su mitad. 384		

§. XXXVII.

En los Egemplos siguientes usarémos de este méthodo para comprehender mejor la regla general: pero si se quiere alguna brevedad en el Cálculo; de las tres dimensiones dadas, que son las dos de la base, y la suma de las alturas; esto es, de 24,

32, 57, tomese indiferentemente el tercio de qualquiera de ellas, y la mitad de otra, y despues se multiplicarán entre sí los tres números que resultáren: por egemplo, de 24 tomese el tercio 8, y de 32 su mitad, que es 16; y multiplicando los tres números 8, 16, y 57, se hallará la misma solidéz 7296.

Aun mejor se abreviará, tomando el sexto de qualquiera de los tres números dados 24, 32, y 57: por egemplo, tomando 4, que es el sexto de 24, y multiplicando los tres números 4, 32, y 57, se tendrá la misma solidéz 7296.

Tambien se evita la molestia de las Fracciones, multiplicando entre sí los tres números 24, 32, y 57, y del producto 43776, sacando el sexto, que es 7296.

§. XXXVIII.

EGEMP. II. Propongase el Prisma triangular truncado DF*gd*, y sea conocido *fg* = 36 pies, base del Trian- Fig. 3.

gulo horizontal, y su altura $ds = 29$ pies: supónganse las tres alturas del Sólido $Dd = 15$, $Gg = 15$, $Ff = 18$.

Lo primero, multiplicando 36 por 29, y del producto 1044 tomando su mitad, se tendrá la base triangular de 522 pies quadrados.

Lo segundo, la suma de las alturas es 48, cuyo tercio es 16, por la altura comun; luego multiplicando 522 por 16, el producto dará la solidéz de 8352 pies cúbicos.

	Alturas.	
36	15	522
29	15	16
324	18	3132
72	48	522
1044	16	8352
522		

§. XXXIX.

EGEMP. III. Para calcular la Piramide yacente $ClLNn$, que tiene su vertice en C, y su base el Trapecio lN, sea dada la linea horizontal $ln = 42$ pies, base del Triangulo horizontal,

Fig. 5.

y

y su altura $Cs = 38$ pies: suponganse las tres alturas $Ll = 15$ pies, $Nn = 9$, y la altura en $C = 0$.

Lo primero, multiplicando 42 por 38, da el producto 1596, y tomando su mitad 798, se tiene el Triangulo horizontal.

Lo segundo, la suma de las tres alturas es 24, y su tercio es 8; luego multiplicando 798 por 8, se tendrá la solidéz de 6384 pies cúbicos.

	Alturas.	
42	15	798
38	9	8
336	0	6384
126	24	
1596	8	
798		

§. XL.

EGEMP. IV. Si se quiere la Piramide erecta $ABDd$, que tiene su vertice en D, y su base el Triangulo rectangulo horizontal BAd, sea dado $Ad =$ 18 pies, la altura $AB = 14$ pies; y de las tres alturas del Sólido sea Dd *Fig. 6.*

$= 12$,

= 12, y las alturas en A, y en B = 0.

Lo primero, multipliquese 18 por 14, y del producto 252 tomese su mitad, que es 126, para tener el Triangulo horizontal.

Lo segundo, de la suma de las tres alturas, que es 12, tomese su tercio 4; y multiplicando 126 por 4, se tendrá la solidéz de la Piramide de 504 pies cúbicos.

	Alturas.	
18	12	126
14	0	4
72	0	504
18	12	
252	4	
126		

§. XLI.

EGEMP. V. Propongase el Prisma truncado, cuya base es el Trapecio ACGH, y supongase AH = 60 pies, CG = 45, la distancia entre las paralelas, ò altura de los Triangulos = 30: sean las alturas AB = 11, CD = 9, GE = 12, HF = 15, y suponga-

Fig. 8. Num. 1.

se

se el Prisma cortado por el Plano AE; resultarán dos Prismas triangulares, que tendrán por bases à los Triangulos ACG, AHG; y hallando la solidéz de cada uno, la suma de los dos dará la del Prisma total.

Así, para el Prisma que tiene por base el Triangulo ACG, multiplíquese 45 por 30, y tomando la mitad del producto, se tendrá la base de 675 pies: Asimismo la suma de las tres alturas que corresponden à este Prisma es 32, cuyo tercio es $10\frac{2}{3}$, ò bien 10 pies, y 8 pulgadas; y multiplicando 675 por 10 pies, y 8 pulgadas, dará la solidéz de 7200 pies cúbicos.

	Alturas.		
45	11		675
30	9		10..8
1350	12		6750
675	32	*Por 8 pulg*[s].	450
	10..8		7200

Lo mismo se hallaría, si de los tres números dados 45, 30, y 32 se to-

tomase el sexto de 30, que es 5, y se multiplicasen 45, 5, y 32, pues darian tambien 7200.

Para el Prisma que tiene por base al Triangulo AHG, multipliquense las dimensiones de la base 60, y 30, y la mitad del producto dará la base 900 pies quadrados.

La suma de las tres alturas correspondientes à esta base es 38, cuyo tercio es $12\frac{2}{3}$, ò bien 12 pies, y 8 pulgadas; luego multiplicando 900 por 12 pies, y 8 pulgadas, se tendrá la solidéz de este Prisma 11400 pies cúbicos.

	Alturas.			
60	12	900		7200
30	15	12..8		11400
1800	11	1800	*Total.*	18600
900	38	900		
	12..8	600 *Por 8 pulg^s.*		
		11400		

Igual solidéz se hallaría, si de las tres cantidades conocidas 60, 30, y 38 se tomase el sexto de una de ellas: por

por egemplo, de 60, que es 10, y se multiplicasen 10, 30, y 38.

Siendo, pues, el Prisma primero 7200, y el segundo 11400, será el Prisma total propuesto de 18600 pies cúbicos.

§. XLII.

Si el mismo Prisma truncado, que tiene por base al Trapecio ACGH, se quiere dividir por el Plano CF, resultarán dos Prismas triangulares, que tienen por bases los Triangulos CGH, CAH, suponiendo las mismas alturas, y dimensiones de las bases. *Num.2.*

Para el Prisma que tiene por base el Triangulo CGH, multipliquense las dimensiones 45, y 30, y del producto 1350 tomando la mitad, será la base 675 pies quadrados.

La suma de las tres alturas correspondientes à esta base es 36, y su tercio 12; luego multiplicando 675 por 12, se tendrá la solidéz de este Prisma de 8100 pies cúbicos, como se manifiesta por el Cálculo que sigue.

Alturas.

45	9	675
30	12	12
1350	15	1350
675	36	675
	12	8100

Para el que tiene por base al Triangulo CHA, se multiplicará 60 por 30, y la mitad del producto dará 900 pies quadrados, por el valor de la base.

Tambien la suma de las tres alturas correspondientes à esta base es 35 pies, y su tercio 11 pies, y 8 pulgadas; luego multiplicando 900 por 11..8, dará el producto 10500 pies cúbicos.

O bien, si de los tres números 35, 60, y 30 se toma el sexto de 30, que es 5; el producto de los tres números 35, 60, y 5 dará la misma solidéz de 10500.

Sumando este Sólido con el antecedente 8100, se tendrá el total 18600, como por la division antecedente.

Al-

	Alturas.		
60	15	900	8100
30	11	11..8	10500
1800	9	900	*Total.* 18600
900	35	900	
	11..8	600 *Por 8 pulgs.*	
		10500	

§. XLIII.

EGEMP. VI. Quando sobre la base trapecia hay dos Prismas triangulares, que juntos no forman Prisma truncado, por no pasar un mismo Plano por los extremos de las quatro alturas, es necesario observar los dos Triangulos superiores, que se ajustan à la superficie del Terreno.

Fig. 8. Num. 1.

Supuesto que estos sean BDE, EFB, y que AH = 54, AC = 36, CG = 48, la altura AB = 8, CD = 7, GE = 10, y HF = 13.

La solidéz del Prisma, que tiene por base al Triangulo ACG, se hallará multiplicando su base por el tercio de sus tres alturas, como pa-

rece en el Cálculo, y se hallará la solidéz de 7200 pies cúbicos.

	Alturas.	
48	8	864
36	7	8..4
288	10	6912
144	25	288 *Por 4 pulgs.*
1728	8..4	7200
864		

Lo mismo se hallaría, si de las dimensiones 58, 36, y 25 se tomase el sexto de 36, que es 6, y se multiplicasen entre sí 48, 6, y 25.

El Prisma, que tiene por base al Triangulo GHA, se hallará en la misma forma multiplicando 54 por 36; y tomando la mitad del producto, se tendrá la base de 972 pies quadrados.

Asimismo la suma de sus tres alturas es 31 pies, y su tercio 10 pies, y 4 pulgadas, será la altura media; luego multiplicando 972 por 10..4, dará la solidéz de 10044 pies cúbicos.

Lo mismo se hallaría, si de los

tres

tres números 54, 36, y 31 se tomase el sexto de 36 para multiplicar entre sí los tres números 54, 6, y 31, pues darian tambien 10044.

	Alturas.		
54	10	972	7200
36	13	10..4	10044
324	8	9720	17244
162	31	324 *Por 4 pulg^s.*	
1944	10..4	10044	
972			

Por consiguiente se tendrá el agregado de 17244 pies cúbicos.

§. XLIV.

Si teniendo la misma base, y alturas se conforman con la superficie del Terreno los dos Triangulos superiores DEF, FBD, resultarán otros dos Prismas triangulares, cuyo agregado será mayor que el antecedente, no obstante que se supongan las mismas dimensiones en bases, y alturas.

Fig. 8. Num. 2.

Porque para el primero, que tiene por base al Triangulo GCH, se hallará este de 864 pies quadrados, que mul-

multiplicado por 10, que es el tercio de la suma de las tres alturas, dará la solidéz en este Prisma triangular de 8640 pies cúbicos, como se ve en el Cálculo.

	Alturas.	
48	7	864
36	10	10
288	13	8640
144	30	
1728	10	
864		

En el que tiene por base al Triangulo HAC, se hallará este de 972 pies quadrados, que multiplicado por 9 pies, y 4 pulgadas, que es el tercio de sus tres alturas, dará la solidéz de este Prisma triangular de 9072 pies cúbicos.

Lo mismo se hallaría, si de los tres números 54, 36, y 28 se tomase el sexto de 36, que es 6; pues multiplicando entre sí 54, 6, y 28 resulta el mismo producto 9072.

Sumando este con el antecedente, se

se tendrá el agregado de 17712 pies cúbicos, que es mayor que el que se halló en el *num*º. 1º.

	Alturas.		
54	13	972	8640
36	8	9..4	9072
324	7	8748	*Total.* 17712
162	28	324 *Por 4 pulg*s.	
1944	9..4	9072	
972			

§. XLV.

EGEMP. VII. Quando la base del Sólido es un Rectangulo como YT, se ofrecen dos Casos: El primero, consiste en el agregado de dos Prismas triangulares, que juntos no forman un Prisma quadrilatero truncado; porque los dos Triangulos superiores están en diversos Planos, y esto puede ser en dos maneras: El segundo es, quando por los extremos de las quatro alturas pasa un mismo Plano. *Fig. 9. Num. 1.*

Caso 1º. Supongase, que con la superficie del Terreno se conforman los Trian-

Triangulos MLR, RSM, que están en diversos Planos.

Sea KT = 56 pies, KY = 42, será todo el Rectangulo KV = 2352; y qualquiera de los Triangulos YKT, KTV = 1176 pies quadrados.

Supongase KL = 5 pies, YM = 7, VS = 8, TR = 9.

Luego para el Prisma, que tiene por base el Triangulo YKT, se multiplicará la base 1176 por 7, que es el tercio de sus tres alturas, y se tendrá la solidéz de 8232 pies cúbicos.

	Alturas.	
56	7	1176
42	5	7
112	9	8232
224	21	
2352	7	
1176		

El que tiene por base el Triangulo YVT se hallará en la misma forma, multiplicando esta base = 1176 por 8, que es el tercio de sus tres alturas, y el producto 9408 dará los pies cúbi-

cos

cos de la solidéz de este Prisma, que sumando con el antecedente, será 17640 pies cúbicos por el agregado de entrambos Sólidos.

§. XLVI.

Con mas brevedad se tendrá el agregado de estos Sólidos, multiplicando la base triangular 1176 por 15, que es el tercio de 45, suma de las seis alturas, como parece por el Cálculo siguiente, en que se duplícan las alturas, que son comunes à entrambos Prismas; ò bien por las que pasa el Plano diagonal YR, resultando el mismo valor de 17640 pies cúbicos.

	Alturas.	
56	7	1176
42	5	15
112	9	5880
224	9	1176
	8	
2352		17640
1176	7	
	45	
	15	

§. XLVII.

Supongase ahora, que en la superficie del Terreno natural se acomodan los Triangulos LMS, SRL, y supónganse los mismos valores en las Lineas, que en el Cálculo antecedente.

Fig. 9. Num. 2.

Para el Prisma que tiene por base el Triangulo KYV = 1176 pies quadrados, se multiplicará esta superficie por 6 pies, y 8 pulgadas, que es el tercio de las tres alturas correspondientes, y dará 7840 pies cúbicos por la solidéz de este Prisma.

Lo mismo se hallaría, si de los tres números 56, 42, y 20 se toma el sexto de 42, que es 7; pues multiplicados entre sí 56, 7, y 20, darán el mismo producto 7840.

	Alturas.		
56	8	1176	
42	7	6..8	
112	5	7056	
224	20	784	*Por 8 pulgs.*
2352	6..8	7840	
1176			

Para

Para el Prisma que tiene por base al Triangulo KTV conocido de 1176 pies quadrados, se multiplicará esta base por el tercio de sus tres alturas, que es 7 pies, y 4 pulgadas, con lo qual se tendrá la solidéz 8624 pies cúbicos.

Lo mismo se hallaría, si de las tres cantidades 56, 42, y 22 se tomase el sexto de 42, que es siete; pues el producto de los tres números 56, 7, y 22 es igualmente 8624.

Sumando, pues, este Sólido con el Prisma antecedente, dará la solidéz total 16464 pies cúbicos.

	Alturas.	
1176	5	7840
7..4	9	8624
8232	8	16464
392	22	
8624	7..4	

§. XLVIII.

Queriendo calcular estos dos Prismas juntos, por tener una misma ba-

se triangular, se multiplicará esta por el tercio de las seis alturas correspondientes à los dos Prismas triangulares que le componen, segun parece por este Cálculo, en que se halla la total solidéz 16464 pies cúbicos, como se halló calculandolos separadamente.

	Alturas.	
56	8	1176
42	7	14
112	5	4704
224	5	1176
2352	9	16464
1176	8	
	42	
	14	

§. XLIX.

Se ha visto *, que el agregado de dos Prismas se halló de 17244 pies, y con los mismos datos en otra suposicion salió de 17712 *: Asimismo el agregado de dos Prismas se halló * de 17640, y en otra suposicion con los

* §. 43.

* §. 44.

* §§. 45, y 46.

los mismos datos salió * de 16464 pies; y esto manifiesta, que para tener la verdadera solidéz, no basta sean conocidas las dimensiones de la base, y las quatro alturas; importa además de esto saber quales son los dos Triangulos superiores, que se acomodan à la superficie del Terreno.

* §§. 47, y 48.

§. L.

Caso 2º. Quando por el extremo de las quatro alturas pasa un mismo Plano LMSR, en este caso es un Prisma truncado, que tiene por base el Rectangulo KYVT; y la solidéz se puede hallar de dos modos, ò por la base triangular, ò por la quadrilatera.

Sea KT = 56 pies, KY = 30, será el Rectangulo de la base = 1680, y qualquiera de los dos Triangulos será 840.

Sean las alturas KL = 9, YM = 11, VS = 15, y TR = 13.

Mo-

Modo primero por la Base triangular.

Concíbase el Sólido cortado por el Plano YR; y el Prisma triangular, que tiene por base al Triangulo YKT, será el producto de la base 840 por 11, que es el tercio de sus tres alturas, y se tendrá 9240 pies cúbicos.

Fig. 9. Num. 1.

	Alturas.
840	11
11	9
840	13
840	33
9240	11

El otro Prisma triangular será 10920 pies cúbicos, que es el producto de la base 840 por 13, el tercio de sus tres alturas.

	Alturas.	
840	13	9240
13	15	10920
2520	11	20160 *Total.*
840	39	
10920	13	

Lue-

Luego el Sólido total es el agregado de 9240, y 10920, que consiste en 20160 pies cúbicos.

Si se quiere por el Cálculo abreviado, se multiplicará la base 840 por 24, que es el tercio de las seis alturas correspondientes à los dos Prismas triangulares, y dará el mismo producto total 20160 pies cúbicos.

	Alturas.
840	11
24	9
3360	13
1680	13
20160	15
	11
	72
	24

§. LI.

La misma solidéz se hallará, si se corta por el Plano KS; pues el Prisma que tiene por base al Triangulo KYV se hallará de 9800 pies cúbicos, que es el producto de la base 840 por

Fig. 9. Num. 2.

11

11 pies, y 8 pulgadas, que es el tercio de 35, suma de sus tres alturas.

		Alturas.
	840	9
	11..8	11
	840	15
	840	35
Por 8 pulgs.	560	11..8
	9800	

El otro Prisma se tendrá multiplicando la base 840 por 12 pies, y 4 pulgadas, que es el tercio de 37, suma de sus tres alturas, y se tendrá 10360 pies cúbicos.

Y sumando este Prisma con el antecedente de 9800, se tendrá el Prisma total 20160 pies cúbicos.

		Alturas.		
840		15		9800
12..4		13		10360
1680		9	*Total.*	20160
840		37		
280	*Por 4 pulgs.*	12..4		
10360				

Por el Cálculo abreviado se hallará

rá la misma solidéz, multiplicando la base triangular 840 por 24, que es el tercio de las seis alturas correspondientes à la division por el Plano KS.

Fig. 9. Num. 2.

	Alturas.
840	9
24	11
3360	15
1680	15
20160	13
	9
	72
	24

Modo segundo por la Base rectangula.

§. LII.

Mas facilmente se halla el Prisma truncado de base rectangula, multiplicandola por el quarto de las quatro alturas, ò por la mitad de dos alturas diametralmente opuestas.

Porque siendo la base rectangula 1680 pies quadrados, y la suma de

 las

las quatro alturas 48, cuyo quarto es 12, multiplicando 1680 por 12, dará la solidéz 20160 pies cúbicos.

	Alturas.	*Alturas.*	*Alturas.*
1680	9	9	11
12	11	15	13
3360	15	24	24
1680	13	12	12
20160	48		
	12		

§. LIII.

Lo mismo se halla multiplicando la base 1680 por la semi-suma de las dos alturas diagonalmente opuestas 9, y 15, que es 12; ò finalmente por la semi-suma de 11, y 13, que es igualmente 12; pues de todos modos saldrá en la solidéz el mismo número de 20160 pies cúbicos.

PAR-

PARTE SEGUNDA.

APLICACION DEL CENTRO de Gravedad à el Cálculo de las Excavaciones, ò Desmontes.

§. LIV.

AUnque se ha explicado en la Parte primera todo lo necesario à formar el Cálculo de aquellos Sólidos, que se pueden considerar en las Excavaciones como Piramides, y Prismas triangulares, y de Base quadrilatera, ò poligona, no se ha distinguido en el mismo Sólido aquella altura, por la qual multiplicada la Base da la solidéz; y solo se ha notado, que la multiplicacion de la Base se haga por el tercio de las tres alturas de los Angulos, el quarto de las quatro, el quinto de las cinco, &c. Ahora explicarémos, que este tercio, quarto, &c. de las alturas en los Angulos,

gúlos, no es otra cosa, que la perpendicular à la Base principal, que pasa por su Centro de Gravedad, y se termína en las Bases opuestas del mismo Sólido.

Para inteligencia de esto se debe dar alguna noticia del Centro de Gravedad, y suponer algunas propriedades, que se demuestran en esta materia; pues no es del asunto formar un Tratado de ella, como no lo es la explicacion de la Arithmética, y Geometría.

§. LV.

Los Mathematicos distinguen dos Centros en el Cuerpo, ò Sólido; el uno de la Magnitud, y el otro de la Gravedad, que algunas veces convienen entre sí, y otras se diferencian; pero siempre se entiende por Centro de la Gravedad un Punto, del qual si se suspendiese el Cuerpo, todas las partes que le componen quedarian en Equilibrio, sin que unas tuviesen mas inclinacion al descenso que las otras: asi-

asimismo toda la Gravedad del Cuerpo consideran rehunida en este Punto.

Igualmente concíben Gravedad en las Lineas, y en las Superficies; pues aunque no son Graves por no ser corporeas, las juzgan así como gravadas de pesos infinitamente pequeños, igualmente distribuídos en toda su extension: Y en este sentido se dice, que la Linea, ò Superficie es Grave, y tienen su Centro de Gravedad.

La inteligencia del Centro de Gravedad de la Linea es útil para hallar con facilidad las Superficies, y el Centro de estas es importante para hallar la solidéz del Cuerpo, como explican, y demuestran los Escritores que hacen la aplicacion de este Centro à la Medída de Sólidos, y Superficies. Aquí supondrémos lo que necesitamos para nuestros Cálculos.

SUPOSICIONES.

§. LVI.

Fig. 13. 1ª Si en un Triangulo ALK de qualquier Angulo A se tira la Recta AE, que divida por medio al Lado opuesto LK, y se corta EO el tercio de AE, el Punto O será el Centro de Gravedad del Triangulo ALK. Igualmente se determinaria el mismo Punto O, si de los Angulos K, ò L se tirasen Rectas, que dividan por medio al Lado opuesto, tomando desde la Base el tercio de esta Linea.

Fig. 16. 2ª Si un Quadrilatero ABCD se divide en Triangulos por la Recta BD, y se tiene E Centro del Triangulo BCD, y G Centro del Triangulo ABD; para tener el Centro comun, ò del Quadrilatero se tira GE, que se dividirá en O en razon reciproca de los Triangulos; esto es, como BCD : BDA :: GO : OE, y el Punto O será Centro del Quadrilatero.

3ª Si

3ª. Si es un Poligono irregular de cinco Lados como ABCDE, tirese qualquiera Recta AC, y hallado el Punto M, Centro del Quadrilatero ACDE, y el Punto N, Centro del Triangulo ABC, se tira MN, que se dividirá en O en razon reciproca del Quadrilatero al Triangulo; esto es, el Quadrilatero EC al Triangulo CAB :: NO : OM, y el Punto O será Centro del Pentagono irregular. *Fig. 7.*

A este modo se hallará el Centro de qualquier Poligono irregular de mayor número de Lados.

4ª. Si es un Paralelogramo como KYVT, se tiran las Diagonales, y el Punto O, en que se cortan, será su Centro de Gravedad. *Fig. 17.*

5ª. Si es un Poligono regular, el Centro de su Magnitud, ò del Circulo circunscripto, será tambien Centro de su Gravedad.

No conducen à nuestro intento los Centros de Gravedad de los Segmentos del Circulo, de la Parabola, de

la

la Elypse, ni de alguna otra Curva; lo que dejamos para los que tratan en general de la Centrovarica de las Superficies. Así pasarémos à establecer la regla general en el Theorema siguiente.

§. LVII.

THEOR. En todo Prisma truncado se tendrá la solidéz, si la Base principal se multiplica por la altura, que pasa por el Centro de Gravedad de dicha Base, y se termína en las del Prisma.

Sea el Prisma triangular truncado Fig. 13. ALKG, cuya Base principal sea ALK, y su Centro de Gravedad el Punto O. Sea OX perpendicular à la Base, ò paralela à las alturas de los Angulos; digo, que multiplicando el Triangulo ALK por OX, se tendrá la solidéz.

Pase un Plano DE por las Paralelas AD, OX, será TE paralela à las alturas, y dividirá por medio à las Rectas FG, LK, porque pasa por el Centro O.

Sea

Sea AD $= a$, LF $= b$, KG $= c$, OX $= z$. En el Trapecio FK será ET $= \frac{b+c}{2}$, y en el Trapecio DE se tendrá DX : XT :: AO : OE *; y por la naturaleza del Centro de Gravedad, siendo OE el tercio de AE, será AO : OE :: 2 : 1; luego * $a \times 1 + \frac{b+c}{2} \times 2 = z \times \overline{2+1}$; esto es, $a + b + c = 3z$, y por consiguiente $\frac{1}{3}(a + b + c) = z$: y suponiendo la Base principal ALK $= \frac{db}{2}$, hecha la multiplicacion, se tendrá $\frac{1}{3}(a + b + c)\frac{db}{2} = \frac{zdb}{2}$ por la solidéz del Prisma, del mismo modo que se halló por la Geometría ordinaria *; luego &c.

* Lema.

* Lema.

* §. 15.

De este Cálculo se deduce, que siendo $\frac{1}{3}(a + b + c) = z$, la perpendicular OX es el tercio de las tres alturas AD, LF, KG.

§. LVIII.

Por el mismo principio se tiene la solidéz de la Piramide yacente C*l*LN*n*, cuyo Vertice es C; porque si en la Base principal C*ln* se tira

Fig. 14.

desde C la recta CR, que divida por medio el lado ln, y se corta RO el tercio de CR, será O el Centro de Gravedad de la Base; y pasando por CR el Plano vertical CRS, cortará por medio en S à la LN, por ser RS paralela à las alturas: levantese en el Plano CRS la perpendicular OX, que lo será tambien à la Base.

Sea la altura en C = o, $Ll = b$, $Nn = c$, OX = z, y el Triangulo $Cln = \frac{db}{2}$: será * RS $= \frac{b+c}{2}$, y por la naturaleza del Centro de Gravedad CR : CO :: 3 : 2; luego en los Triangulos semejantes CRS, COX será CR : CO :: RS : OX; esto es, $3 : 2 :: \frac{b+c}{2} : \frac{b+c}{3} = z$, ò bien $\frac{1}{3}(o+b+c) = z$; y multiplicando por esta altura la Base principal $\frac{db}{2}$, se tendrá la solidéz $\frac{1}{3}(o+b+c)\frac{db}{2} = \frac{zdb}{2}$, como se halló *; luego multiplicando la Base Cln por la altura OX, se tiene la solidéz de la Piramide.

* Lema.

* §. 20.

Por este Cálculo consta, que OX

es

es el tercio de las tres alturas en los Angulos, porque se halló $\frac{1}{3}(o+b+c)=z$.

§. LIX.

Igualmente comprehende este principio à la Piramide erecta ABCD, cuyo Vertice es D, y su Base principal el Triangulo ABC; porque tirando CL, que divida por medio al lado AB, y cortando LO igual al tercio de CL, será O el Centro de la Base; y pasando un Plano DCL por CL, y la altura CD, tirando OX paralela à CD, será OX perpendicular à la Base. *Fig.15.*

Sea, pues, la altura en A = o, en B = o, OX = z, DC = c, y la Base ABC = $\frac{dh}{2}$; y siendo CL : OL :: 3 : 1, por la naturaleza del Centro de Gravedad, en los Triangulos semejantes LOX, LCD se tiene CL:OL::DC:OX; esto es, $3 : 1 :: c : \frac{c}{3} = z$, ò bien $\frac{1}{3}(o+o+c) = z$, por cuya altura multiplicada la Base $\frac{dh}{2}$, se tendrá la solidéz $\frac{1}{3}(o+o+c) \times \frac{dh}{2} = \frac{zdh}{2}$, como en el §.21; luego mul-

 tipli-

tiplicando la Base principal ABC por la altura OX, se tiene la Piramide.

Tambien es evidente, que OX es el tercio de las tres alturas de los Angulos de la Base, porque $\frac{1}{3}(o+o+c)=z$.

§. LX.

Quando el Prisma truncado tiene *Fig.16.* por Base un Quadrilatero ABCD, tirense las Diagonales AC, BD, que se cortarán en Y: por qualquiera de ellas BD pase el Plano vertical BP, que dividirá al Sólido en dos Prismas triangulares; cortese BD por medio en R, y tirando las rectas RA, RC, tomese RE el tercio de RC, y RG el tercio de RA, será el Punto E centro del Triangulo BCD, y G centro de ABD: tirese GE, que será paralela à AC, y se tendrá CY:YA::EV:VG; cortese EO = GV, y será GO = EV; luego CY : YA :: GO : OE. Pero el Triangulo BCY: BYA:: CY: YA, y el Triangulo YCD : YDA :: CY : YA; luego el Triangulo BCD : BDA :: CY : YA; esto es, BCD: BDA:: GO: OE, por

por consiguiente el Punto O es centro del Quadrilatero ABCD *.

* §. 56.

En los Puntos G, O, E levantense las perpendiculares GH, OX, EF, que estarán todas en el Trapecio EH; digo, que multiplicando la Base principal ABCD por la altura OX, se tendrá la solidéz del Prisma propuesto.

Sea BN $= a$, CZ $= b$, DP $= c$, AM $= e$, OX $= z$, BD $= d$, el Triangulo BCD $= \frac{dh}{2}$, ABD $= \frac{df}{2}$, será EF $= \frac{1}{3}(a+b+c)$ *, y GH $= \frac{1}{3}(c+e+a)$: asimismo se tiene GO : OE :: $\frac{dh}{2} : \frac{df}{2}$; luego * EF × GO + GH × OE = OX × GE; esto es $\frac{1}{3}(a+b+c)\frac{dh}{2} + \frac{1}{3}(c+e+a)\frac{df}{2} = z\left(\frac{dh}{2} + \frac{df}{2}\right)$. Pero el Prisma triangular, que tiene por Base al Triangulo BAD es $\frac{1}{3}(c+e+a)\frac{df}{2}$ *; y el que tiene por Base al Triangulo BCD es $\frac{1}{3}(a+b+c)\frac{dh}{2}$; luego multiplicando el Quadrilatero ABCD $= \frac{dh}{2} + \frac{df}{2}$ por OX $= z$, se tendrá la solidéz del Prisma total.

* §. 57.

* Lema.

* §. 57.

Para

Para tener el valor de la altura OX $= z$, se partirá el Sólido por la Base ABCD $= \frac{db}{2} + \frac{df}{2}$, y se tendrá

$$\frac{\frac{1}{3}(a+b+c)\frac{db}{2} + \frac{1}{3}(c+e+a)\frac{df}{2}}{\frac{db}{2}+\frac{df}{2}} = z,$$ que

reducido es $\frac{\frac{1}{3}(a+b+c)b + \frac{1}{3}(c+e+a)f}{b+f} = z$ por la Formula general de la altūra, comun en el Prisma de Base quadrilatera.

§. LXI.

Si la altura CZ fuere igual à la opuesta AM; esto es $b=e$, en este caso substituyendo b en lugar de e, sería la Formula $\frac{\frac{1}{3}(a+b+c)b + \frac{1}{3}(c+b+a)f}{b+f} = z$, que reducida resulta $\frac{1}{3}(a+b+c) = z$; ò bien $\frac{1}{3}(a+c+e) = z$, substituyendo e en lugar de b, y sería el Sólido $\frac{1}{3}(a+b+c) \times \left(\frac{db}{2}+\frac{df}{2}\right) = z\left(\frac{db}{2}+\frac{df}{2}\right)$.

§. LXII.

Quando la Diagonal BD divide por medio al Quadrilatero ABCD, en

este

este caso los Triangulos BCD, BAD son iguales; esto es $\frac{dh}{2} = \frac{df}{2}$, $h = f$, AY = YC, GV = EV: el Punto O coincide con V, y OX con VT, que siendo medio arithmético entre EF, y GH, resulta OX $= z = \frac{1}{6}(2a + b + 2c + e)$; y la Base quadrilatera dh multiplicada por la altura z, dará la solidéz $\frac{1}{6}(2a + b + 2c + e)\, dh = zdh$.

§. LXIII.

En este mismo caso, si la altura AM = CZ; esto es $b = e$, substituyendo b en lugar de e, será la Formula del Sólido $\frac{1}{6}(2a+2b+2c)dh = \frac{1}{3}(a+b+c) \times dh = zdh$, por consiguiente la altura comun OX $= z = \frac{1}{3}(a + b + c)$; ò tambien $\frac{1}{3}(a + c + e)$, substituyendo e en lugar de b.

§. LXIV.

Se ha de notar, que en el Prisma truncado de Base quadrilatera, que no es Paralelogramo, solo puede haber dos alturas iguales; y esto sucederá, quando la recta que las une fue-

fuere paralela à la comun Seccion de la Base principal con el Plano superior inclinado, si se prolongasen.

§. LXV.

Quando en el Prisma truncado de Base quadrilatera no ocurre alguno de los tres casos particulares ya notados (en que la Formula general, así del Sólido, como de la Altura comun, se reduce à menor Expresion, ò à Cálculo mas facil) sería mejor dividir el Sólido propuesto en dos Prismas triangulares truncados; y con mayor razon, quando la Base principal es un Poligono irregular de cinco, ò mas lados, porque es trabajoso hallar el Centro, y la Altura comun.

§. LXVI.

Siempre que à la superficie del Terreno se acomode un Paralelogramo, resulta en el Plano horizontal la Base quadrilatera tambien paralelograma, y se hace el Cálculo mas sencillo; porque en este caso el Centro de

de Gravedad de la Base es el Punto O, en que se cortan igualmente las Fig.17. Diagonales KV, YT; y se tiene la solidéz multiplicando el Paralelogramo KYTV por la altura OX.

Supongase d la latitud de la Base, ò distancia entre las Paralelas KY, TV; YK $= b$, será la Base KYVT $= db$.

Sea YM $= a$, KL $= b$, TR $= c$, SV $= e$, OX $= z$; y porque YT está dividida por medio en O, en el Trapecio YR será OX medio arithmético entre YM, y TR; luego OX $= z = \frac{1}{2}(a + c)$: y por igual razon $z = \frac{1}{2}(b + e)$; por consiguiente el Sólido $zdb = \frac{1}{2}(a + c)\, db$, ò bien $zdb = \frac{1}{2}(b + e)\, db$.

De que se sigue lo 1°., que siendo $z = \frac{1}{2}(a + c)$, y $z = \frac{1}{2}(b + e)$, será $a + c = b + e$; esto es, la suma de dos alturas opuestas, igual à la suma de las otras dos.

Lo 2°., será $2z = \frac{1}{2}(a + b + c + e)$; luego tambien OX $= z = \frac{1}{4}(a+b+c+e)$, y el mismo Sólido $zdb = \frac{1}{4}(a+b+c+e)\, db$.

§. LXVII.

Todo esto se halló por la Geometría ordinaria *. Ahora se advierte, que quando la comun Seccion del Plano horizontal, y del Obliqüo es paralela à una Diagonal VT, las alturas YM, TR serán iguales; y quando la Seccion es paralela à un lado KY, tambien lo será al opuesto TV, y serán iguales las alturas YM, KL, como tambien VS, TR. Fuera de estos dos casos todas las alturas serán desiguales; pero siempre la suma de las dos opuestas diagonalmente, es igual à la suma de las otras dos.

* §§. 25, 26, 27.

§. LXVIII.

Si se corta GO el tercio de KO, y EO el tercio de OV, serán los Puntos E, y G Centros de los Triangulos iguales YVT, YKT; y dividido el Sólido por el Plano YR, resultarán dos Prismas triangulares: levantense las perpendiculares EF, y GH, será EF $= \frac{1}{3}(a+b+c)$, GH $= \frac{1}{3}(c+e+a)$ *; y en el Trapecio EH será el medio arithmético

* §. 57.

métrico XO $= \frac{1}{6}(a+b+c+c+e+a) = \frac{1}{6}(2a+b+2c+e)$, y el Sólido $zdb = \frac{1}{6}(2a+b+2c+e)db = \frac{1}{3}(2a+b+2c+e)\frac{db}{2}$; esto es, el tercio de las seis alturas, multiplicado por la Base triangular, dará la misma solidéz que se halló §. 24.

En el mismo caso, si $b=e$, tambien $b=z$, $a+c=2z$, y $\frac{1}{6}(2a+b+2c+e) = \frac{6z}{6} = z$; y el Plano YR dividirá por medio al Prisma de Base paralelograma.

Esta Advertencia solo conduce à manifestar la correspondencia del Cálculo por el Centro de Gravedad con el que se ha dado en la Parte primera.

§. LXIX.

En el Prisma truncado, que tiene por Base principal al Pentagono regular ABCDE, el Punto O es Centro de Gravedad de la Base, porque es el Vertice comun de los cinco Triangulos totalmente iguales, que la componen, ò Centro de su Circulo circuns- *Fig. 11.*

§. 56.* cripto *, y se tendrá la solidéz multiplicando esta Base por la perpendicular OX.

Supongase (como en el Articulo 34) AP $= a$, BR $= b$, CS $= c$, DT $= e$, EV $= f$, OX $= z$: qualquiera de los cinco Triangulos AOB $= \frac{db}{2}$, y será toda la Base $\frac{5db}{2}$; y se halló la solidéz $\frac{5db}{2}(a+b+c+e+f)\frac{1}{5}$; luego solo falta probar, que $z = \frac{1}{5}(a + b + c + e + f)$; pero en el mismo lugar se halló $5z = a + b + c + e + f$; luego $z = \frac{1}{5}(a + b + c + e + f)$; esto es, la perpendicular OX es el quinto de las cinco alturas en los Angulos, y por consiguiente la Altura comun.

Del mismo modo se hallará, que el Prisma truncado que tiene por Base un Poligono regular de número impár, como 7, 9, 11, &c., la perpendicular correspondiente al Centro de Gravedad es el $\frac{1}{7}$, el $\frac{1}{9}$, el $\frac{1}{11}$, &c. de las alturas en los Angulos, y conseqüentemente la Altura comun, por la qual multiplicada la Base se tiene la solidéz.

§. LXX.

§. LXX.

Por igual razon en el Prisma truncado, que tiene por Base principal al Hexagono regular ABC, &c., la perpendicular OX, que corresponde à su Centro de Gravedad O, es el sexto de las seis alturas de los Angulos: Porque (hechas las mismas suposiciones que en el §. 35) se halló $6z = a + b + c + e + f + g$; luego $OX = z = \frac{1}{6}(a + b + c + e + f + g)$; esto es, el sexto de las seis alturas de los Angulos, y conseqüentemente la Altura comun; por la qual multiplicada la Base $3db$, se tiene la solidéz $3dbz = 3db(a+b+c+e+f+g)\frac{1}{6}$. *Fig. 12.*

De la misma forma se hallará, que en el Prisma truncado que tiene por Base un Poligono regular de lados en número par, como 8, 10, 12, &c., la perpendicular que pasa por el centro de la Base es el $\frac{1}{8}$, el $\frac{1}{10}$, el $\frac{1}{12}$, &c. de las alturas en los Angulos, y consiguientemente la Altura comun, por la qual multiplicada la Base dará la solidéz.

§.LXXI.

§. LXXI.

Esta regla conviene al Cilindro truncado; porque el Circulo, ò Base principal, no es otra cosa que un Poligono regular de lados infinitamente pequeños; así, la altura que corresponde al centro de la Base, es aquella por la qual multiplicada la misma Base dará la solidéz.

Igualmente, si el Prisma truncado tiene por Base un Elypse, el centro de la Base es el punto en que se cortan sus Exes; y la altura que corresponde à este centro multiplicada por la Base dará la solidéz.

Estos Sólidos terminados por Superficie curva, aunque tienen poco uso en el Cálculo de las Excavaciones, pueden ocurrir en la formacion de un Pozo excavado en el pendiente de un Terreno, ò en un Plano inclinado.

§. LXXII.

Importa notar, que en todo Prisma truncado, la perpendicular que

pasa

pasa por el Centro de Gravedad de la Base principal, pasa tambien por el Centro de Gravedad de las Bases inclinadas: Porque lo 1º. se ha visto *, que el Trapecio AT divide por medio à los lados LK, FG; y siendo O centro de la Base ALK, será AE : OE :: DT : XT; pero OE es el tercio de AE; luego XT el tercio de DT, por consiguiente el Punto X es el Centro del Plano inclinado DFG.

* §. 17.
Fig. 13.

§. LXXIII.

Lo 2º. En la Piramide yacente C*l*N se tiene * el Punto O, centro de la Base C*ln*, y el Plano vertical CSR divide por medio los lados LN, *ln*; y en los Triangulos semejantes CRS, COX, se tendrá CR : OR :: CS : XS; y siendo RO el tercio de CR, será XS el tercio de CS; luego X es Centro de Gravedad del Plano inclinado CLN.

Fig. 14.
* §. 58.

§. LXXIV.

Lo 3º. En la Piramide erecta DABC se tiene * el Punto O, centro

Fig. 15.
* §. 59.

tro de la Base principal ABC, y el Plano vertical CDL corta por medio al lado AB; y en los Triangulos semejantes LCD, LOX, será LC : LO :: LD : LX; pero LO es el tercio de LC; luego LX es el tercio de LD, y el Punto X será Centro de Gravedad del Triangulo ABD.

§. LXXV.

Lo 4°. En el Prisma truncado, que tiene por Base al Quadrilatero ABCD, se halló *, que su Centro de Gravedad es el Punto O. Ahora se probará, que el Punto X es centro del Quadrilatero inclinado MNZP.

Fig. 16.

* §. 60.

Levantense las perpendiculares RS, YK; tirense las MS, SZ, MZ; y en el Trapecio MR se hallará GH, en el Trapecio RZ se hallará EF, y en el Trapecio MC se hallará YK (comun Seccion de los Planos AZ, PB), y en el Trapecio PB se hallará RS.

Por lo dicho *, será H centro del Triangulo MPN, y F centro de NZP, y el Centro comun estará en la HF.

* §. 72.

Pero

Pero en el Trapecio HE se tiene GV : VE :: HT : TF, y asimismo GO : OE :: HX : XF ; y siendo EO = GV, será XF = HT, y HX = FT ; y con el mismo razonamiento, que se hizo *, se probará, que el Triangulo NZP:PMN :: HX : XF ; luego el Punto X es Centro de Gravedad del Quadrilatero inclinado MNZP.

* §. 60.

§. LXXVI.

De aquí se sigue, que el Triangulo BCD : BAD :: NZP : PMN, pues unos, y otros están en la razon de GO:EO, que es la misma de HX: XF.

Por consiguiente, quando el Triangulo BCD es igual à BAD, tambien PZN = NMP ; y como en este caso GO = OE, tambien HX = XF ; y el centro X caerá en la Diagonal NP, que divide por medio al Quadrilatero superior.

Lo mismo se entiende, quando la Base del Prisma truncado es qualquiera otro Poligono de mayor número de lados ; pues su Centro de Grave-

dad siempre estará en aquella Linea, que le divida por medio.

§. LXXVII.

Lo 5º. Si es un Prisma truncado, cuya Base es el Rectangulo KYVT, la perpendicular OX pasa por el centro del Plano inclinado MSRL; porque los Triangulos MSR, MRL serán iguales, y el centro estará en MR *: por igual razon estará en LS; luego lo será el Punto X, en que se cortan.

Fig. 17.

* §. 74.

§. LXXVIII.

Lo 6º. Si es el Prisma truncado, que tiene por Base el Pentagono regular ABCD, &c., tambien X será el centro del Pentagono inclinado; porque * los cinco Triangulos superiores son iguales entre sí, como asimismo sus mitades; luego qualquiera recta TN, tirada de un Angulo T à la mitad de la Base opuesta PR, divide por medio al Pentagono, y en ella estará su Centro de Gravedad: por igual razon lo estará en la recta PQ; luego lo será el Punto X, comun à entrambas.

Fig. 11.

* §. 74.

Com-

Comprehende esta demostracion à todo Prisma truncado de Base regular de qualquier número de lados impár.

§. LXXIX.

Lo 7°. En el Prisma truncado, que tiene por Base el Hexagono regular ABCD, &c., tambien el Punto X es Centro de Gravedad del Plano inclinado MPH, &c.; porque * los seis Triangulos superiores son iguales entre sí; por consiguiente la recta PY le divide por medio, y en ella estará el Centro comun: por la misma razon lo estará en la recta MK; luego lo será el Punto X, en que se cortan.

Fig. 12.

* §. 74.

Esto mismo conviene finalmente à todo Prisma de Base regular de lados en número par, y al Cilindro que tiene por Base al Circulo, ò à la Elypse; pues el extremo del Exe, cortando por medio à qualquier Diametro, será Centro de la Elypse inclinada.

§. LXXX.

De las Advertencias dadas desde el §. 72, se infiere la facilidad de Mar-

car sobre el Terreno todos los Centros de Gravedad correspondientes à los Triangulos, Quadrilateros, ò Poligonos, en que se dividió la superficie natural de la Excavacion, ò Desmonte, con arreglo à los Avisos dados en la primera Parte hasta el §. 13: Y queriendo usar para los Cálculos de la Theoría del Centro de Gravedad, se pueden disponer los Testigos, ò Damas, colocandolos en estas Alturas, que sirven para hallar los Sólidos particulares; pero demás de los Testigos, se han de señalar todos los Angulos de las Bases, para distinguir la que corresponde à cada Sólido.

§. LXXXI.

Aunque el Triangulo sea el Plano mas acomodable à la superficie de un Terreno irregular, puede tambien alguna porcion de este tener la figura de un Segmento de Esfera, ò Esferoide: En tal caso (que será rarisimo) se calculará separadamente este Segmento por las Reglas prevenidas en

la

la Geometría ordinaria, ò las del Centro de Gravedad; y en todo lo demás se procederá como se ha advertido. Pasémos ahora à explicar los defectos, ò errores, que pueden cometerse por el méthodo ordinario indiscretamente practicado, dando algunos Documentos para corregirlos, ò aproximar el Cálculo à la verdad.

PARTE TERCERA.

INTELIGENCIA DE LA REGLA ordinaria para aproximar el Cálculo à la verdad.

§. LXXXII.

YA se dijo en la Introduccion de este Discurso, que los Escritores de Fortificacion, y Arquitectura tocan tan ligeramente esta materia, que dejan abierto un espacioso campo para siniestras inteligencias, y abusos perjudiciales: se contentan con las

Re-

Reglas de Geometría, dadas para los Sólidos mensurables; y remiten à estas mismas el Cálculo de los Cuerpos irregulares, dejando à la prudencia de los Prácticos la eleccion de dividir el Terreno. No habría recelo de error alguno, si estos Sabios concurriesen à la Práctica; pero puede recaer en Sugeto de pocas luces, que aun deseando el acierto, tome inadvertidamente el camino que le parezca mas breve, ò facil, sin prevenir el riesgo à que se expone en detrimento de la exactitud. Pondrémos un Egemplar, que haga visible lo que se ha dicho.

§. LXXXIII.

Mr. Clermont, Ingeniero Francés, en el octavo Libro de su Geometría Práctica, persuade la necesidad de la inteligencia de estos Cálculos en todo Ingeniero, llamando indigno de este nombre al que lo ignora, y propone la Regla siguiente.

„ Multiplíquese la superficie de to-

„ da

„ da la Base por una altura média en-
„ tre todas sus diversas Alturas, y el
„ producto de esta multiplicacion se-
„ rá la solidéz........

„ La Altura comun se halla como
„ se sigue: Hagase una suma de to-
„ das las Alturas particulares, que se
„ hayan notado sobre el Perfil de las
„ Tierras, y tambien las Alturas de
„ todos los Testigos, ò pequeñas Pi-
„ ramides, que se hayan dejado en el
„ Terreno de la Excavacion: divida-
„ se la cantidad de todo este agrega-
„ do por el número de las Alturas to-
„ madas en el Perfil, y en los Testi-
„ gos; el Cociente dará la Altura co-
„ mun de todo el Sólido, por la qual
„ multiplicando la superficie de la
„ Base dará la masa, ò solidéz de la
„ Tierra. „

Despues añade la nota: „ Como
„ los espacios de las Tierras que se
„ mueven son rara vez unidas por lo
„ superior, y que al contrario hay
„ ordinariamente desigualdades, esto
„ hace,

„ hace, que quantas mas Alturas per-
„ pendiculares se tomen, tanto mas
„ justa es la Práctica. „

§. LXXXIV.

Ninguna Regla se dará mas facil, y breve para Excavaciones, ò Desmontes; y sin duda por estas utilidades se sigue ordinariamente: Pero se cometen errores grandes, quando en su aplicacion se abusa de la generalidad con que el Autor la propone; y para evitarlos, importa hacer sobre ella algunas Advertencias. El mismo Escritor previene, *que quantas mas Alturas se tomen, tanto mas justa es la Práctica*: Y en esto manifiesta, que no la produce como exacta, sino como proxima à la verdad, à que puede acercarse mas, y mas, segun se aumentáre el número de las Alturas; pero aun tomada en este sentido, para usar bien de ella, se requieren algunas reflexiones relativas à las Bases, à las Alturas, y à la situacion de estas.

§. LXXXV.

§. LXXXV.

Para lo primero, se ha de notar, que si las Bases son dos, es indispensable suponerlas, ò considerarlas iguales para el uso de la Altura média. Porque sea un Sólido $aap+bbq$ compuesto de dos Prismas, cuyas Bases sean aa, bb, y sus Alturas p, y q; la Altura média será $\frac{1}{2}(p+q)$, que multiplicada por la Base total $aa+bb$, dará el producto $(aa+bb)\times\frac{1}{2}(p+q)=\frac{1}{2}(aap+bbp+aaq+bbq)$, que se debe igualar al Sólido total para tener $aap+bbq=\frac{1}{2}(aap+bbp+aaq+bbq)$, ò bien $2aap+2bbq=aap+bbp+aaq+bbq$; esto es, $aap+bbq=bbp+aaq$; y quitando de entrambas partes $bbq+aaq$, quedará $aap-aaq=bbp-bbq$; y partiendo todo por $p-q$, se tendrá $aa=bb$; esto es, las Bases deben ser iguales.

Tambien se debe considerar, que si la Base total de la Excavacion se divide en tres, ò mas partes desiguales, la Regla de la Altura média podrá muchas veces tener lugar, como

se manifiesta en este Egemplo. Supongase, que las Bases son 16, 9, 4, y sus Alturas 3, 20, 1; será la Altura média $\frac{1}{3}(3 + 20 + 1) = 8$, que multiplicada por la Base total $16 + 9 + 4 = 29$, dará el producto $232 = 16 \times 3 + 9 \times 20 + 4 \times 1$. Pero si à estas mismas Bases desiguales se les dan otras Alturas distintas, como 14, 6, 10, se verá, que no conviene la Regla de la Altura média; porque $(16 + 9 + 4) \times \frac{1}{3}(14 + 6 + 10) = 290$, no produce la verdadera solidéz, que es $16 \times 14 + 9 \times 6 + 10 \times 4 = 318$.

Ultimamente, si se supone que todas las Bases en qualquier número n son iguales, que una de ellas se expresa por aa, y que sus Alturas respectivas sean p, q, r, &c.; es manifiesto, que $aap + aaq + aar + \&c. = naa \times \frac{1}{n}(p + q + r + \&c.)$; esto es, que la suma de las Bases iguales $aa + aa + aa + \&c. = naa$ multiplicada por la Altura média $\frac{1}{n}(p + q + r + \&c.)$ da la solidéz que se busca.

De

De aquí se infiere, que la Regla de *Mr. Clermont* no es general; porque es cierta quando las Bases son iguales, dudosa si la desigualdad recae en tres, ò mas de ellas, y erronea quando son dos las desiguales.

§. LXXXVI.

Las Alturas se han de distribuir igualmente en toda la extension, no solo paraque sirva cada una à su Base particular, sino paraque manifiesten las principales desigualdades del Terreno.

§. LXXXVII.

Hasta aquí es clara, è inteligible la Regla; y las dificultades, y obscuridades recaen sobre la situacion de las Alturas particulares.

Todos saben, que en cada Sólido de los que componen el total, entre sus infinitas Alturas hay una, que multiplicada por su Base dará la solidéz; pero es dificil averiguar su situacion (esto es, el punto de la Base à que corresponde), pues se requiere

una idéa clara, y distinta de la superficie del Terreno; y para su determinacion se necesita de un Cálculo de orden superior à la Geometría ordinaria, que ni es del asunto, ni proprio à estas Advertencias. A esto se añade, que aunque se tuviese cierta la situacion de una Altura particular, no podria servir de regla para las demás; porque suponiendose irregular todo el Terreno, las superficies superiores serian diversamente inclinadas, y desiguales: siguiendose de la incertidumbre en las Alturas particulares la duda en la Altura média, y por consiguiente en la solidéz de la propuesta Excavacion.

La determinacion del número de Alturas, y su situacion es arbitraria, y corresponde al prudente juicio del que hace la Medicion, à vista de la extension, y desigualdades del Terreno; y no es absolutamente necesaria la actual division de las Quadriculas iguales entre sí, y en número cor-

correspondiente al de las Alturas, ni situar estas à iguales distancias: Pero debemos considerar el buen orden, y distribucion en las Bases, y Alturas, como ya se ha dicho, para entender el fundamento de hallar la solidéz, por la multiplicacion de la base total, por la Altura média; siendo constante, que sin el buen orden, y méthodo expresado, no se puede juzgar de la bondad, ò defectos de la Regla.

Sirva para mayor claridad el siguiente Egemplo.

§. LXXXVIII.

Supongase, que el Rectangulo AQ es el Plano de una Excavacion en Terreno desigual, que su longitud AD = 120 pies, y su latitud AN = 90, será toda la Superficie de 10800 pies quadrados. Fig. 18.

Cortense sobre el Terreno los Perfiles AD, EH, YM, NQ equidistantes entre sí, como tambien los perpendiculares AN, BO, CP, DQ.

Tomense con el Nivel las 16 Alturas

ras correspondientes à los Puntos A, B, C, &c., en que se cortan; y sean sus valores en pies, y pulgadas, segun se notan en las suposiciones, y Cálculo siguiente.

	Pies. Pulgs.
A =	5..0
B =	6..0
C =	7..0
D =	8..6
E =	7..0
F =	8..0
G =	9..0
H =	10..6
I =	9..0
K =	10..0
L =	11..0
M =	12..6
N =	7..6
O =	8..6
P =	9..6
Q =	11..0
	140..0

$\frac{140}{16} = 8..9$

```
10800
  8..9
------
86400
 8100
------
94500
```

```
  675
  140
-----
27000
675
-----
94500
```

Porque son 16 las Alturas, concíbase el Rectangulo AQ dividido por las

las lineas de puntos en 16 Quadriculas iguales entre sí, como Bases de los Sólidos particulares, à cada una de las quales corresponde su Altura; y será cada Base de 675 pies quadrados, segun resulta dividiendo 10800 por 16.

La suma de todas las Alturas 140 pies partase por 16, número de ellas, y se tendrá 8 pies, y 9 pulgadas por el valor de la Altura média, que multiplicada por toda la Base (10800) dará la solidéz de 94500 pies cúbicos.

Lo mismo se hallará multiplicando la Base particular 675 por 140, suma de todas las Alturas.

§. LXXXIX.

En este Egemplo se reconoce, que por el buen orden, y distribucion de Bases, y Alturas particulares, quatro de estas caen en los Angulos, ocho en los lados, y quatro dentro de las Quadriculas; pero quien puede asegurar, que cada Base multiplicada por su respective Altura dé la verdadera solidéz

lidéz del Prisma irregular, ni aun proximamente?

Pudieran tambien disponerse las Alturas, que cayesen en los Centros de las Quadriculas, en los Puntos *n*, *r*, *s*, &c.: pero quedaba la misma duda; y solo en el caso de ser Prismas quadrilateros truncados, cuyas Superficies inclinadas coinciden con la natural del Terreno, darian la solidéz, segun se ha demostrado en la primera, y segunda Parte: Y este caso rarisimo no puede servir de Regla general para qualquier Terreno irregular.

Demás, que aunque esta ventaja se hallase casualmente en una, ò mas Quadriculas, si faltaba en otras, resultaría necesariamente defectuosa la Altura média, que da la solidéz total. Así, para regla de aproximacion à la verdad, es mejor servirse del méthodo siguiente.

§. XC.

Este consiste en dividir el Plano de la Excavacion en Quadriculas iguales entre

entre sí, y de una magnitud correspondiente à la desigualdad del Terreno, notando las Alturas en todos los Angulos; pero la que ha de servir para hallar la solidéz en cada Prisma particular, sea el quarto de las 4 Alturas de sus Angulos: Y si se quiere la Altura média comun à todas, se partirá la suma de las Alturas médias por el número de ellas; y el Cociente multiplicado por la Base total, dará la solidéz del mismo modo, que si una Base particular se multiplicase por la suma de las Alturas médias.

§. XCI.

Sea el Plano de la Excavacion el mismo Rectangulo AQ de una longitud AD de 120 pies, y su latitud AN de 90 pies; y será la Superficie de 10800 pies quadrados.

Supongase, que (segun las desigualdades del Terreno) parezca suficiente dividir el Plano en 9 Quadriculas iguales AF, BG, &c., cada una de 1200 pies quadrados.

Busquense con el Nivel las 16 Alturas correspondientes à todos los Puntos A, B, C, &c. Tomese en cada Quadricula el quarto de las Alturas de sus Angulos; y se tendrán 9 Alturas médias, cada una de las quales expresará la Altura respectiva de su Prisma irregular, como se manifiesta en la página del frente.

Luego multiplicando una Base particular 1200 por 80 pies, 7 pulgadas, y 6 lineas, suma de todas las Alturas médias, se tendrá la solidéz total de la Excavacion 96750 pies cúbicos proximamente.

Si la suma de todas las Alturas médias se parte por 9 (número de ellas) el Cociente 8 pies, 11 pulgadas, y 6 lineas será la Altura média, comun à todos los Sólidos particulares; y multiplicando toda la Base 10800 por 8 pies, 11 pulgadas, y 6 lineas, se tendrá la misma solidéz 96750 pies cúbicos.

Alt^s.	P^s. Pul^s.
A	6.0
B	6.6
C	7.6
D	8.6
E	7.0
F	8.0
G	9.6
H	10.0
Y	9.0
K	9.6
L	10.6
M	11.6
N	7.6
O	8.6
P	10.0
Q	10.6
	140.

ALTURAS MEDIAS.

	P^s. Pu^s.	Pies. Pu^s. L^s.
$\frac{1}{4}(A+E+F+B)=$	$\frac{27.6}{4}=$	6.10.6
$\frac{1}{4}(B+F+G+C)=$	$\frac{31.6}{4}=$	7.10.6
$\frac{1}{4}(C+G+H+D)=$	$\frac{35.6}{4}=$	8.10.6
$\frac{1}{4}(E+Y+K+F)=$	$\frac{33.6}{4}=$	8. 4.6
$\frac{1}{4}(F+K+L+G)=$	$\frac{37.6}{4}=$	9. 4.6
$\frac{1}{4}(G+L+M+H)=$	$\frac{41.6}{4}=$	10. 4.6
$\frac{1}{4}(Y+N+O+K)=$	$\frac{34.6}{4}=$	8. 7.6
$\frac{1}{4}(K+O+P+L)=$	$\frac{38.6}{4}=$	9. 7.6
$\frac{1}{4}(L+P+Q+M)=$	$\frac{42.6}{4}=$	10. 7.6
		80. 7.6

$$\frac{80.7.6}{9}=8.11.6$$

1200	10800
80.7.6	8.11.6
96000	86400
700	9900
50	450
96750	96750

§. XCII.

Esta Regla (que daría exactamente la solidéz, si por los extremos de las Alturas en cada Quadricula pasase un Plano, que no difiera de la superficie del Terreno *) es muy útil para aproximar à la verdad, quando no pasáre el referido Plano; ò si pasando, no se conformase con las desigualdades del Terreno. El fundamento de ella consiste en considerar cada Sólido particular, como un agregado de dos Prismas triangulares truncados; lo que puede ser en dos maneras, segun la Diagonal por donde pasáre el Plano vertical, comun à entrambos.

* §. 27.

Fig. 19. Por egemplo. Sobre la Base AEFB suponganse dos Prismas triangulares truncados, cuyas Bases sean los Triangulos AEF, ABF: Concíbanse tambien otros dos Prismas truncados, cuyas Bases sean los Triangulos BAE, BFE: La Regla antecedente dará un Sólido médio arithmético entre la suma

ma

ma de los dos primeros, y la suma de los dos segundos; porque estos Sólidos, teniendo una misma Base, tienen la razon de sus Alturas, que en los primeros es $\frac{1}{6}(2A+E+2F+B)$, y en los segundos $\frac{1}{6}(A+2E+F+2B)$ *: Pero $\frac{1}{4}(A+E+F+B)$ es médio arithmético entre las dos Alturas antecedentes (pues su duplo es igual à la suma de entrambas; esto es $\frac{1}{2}(A+B+E+F) = \frac{1}{6}(3A+3E+3F+3B)$; luego el Sólido producido por la Regla dada, es médio arithmético entre la suma de los dos primeros, y la suma de los dos segundos.

* §. 24.

§. XCIII.

Importa ahora considerar, que los dos Prismas triangulares truncados, así primeros, como segundos, darian la verdadera solidéz, quando los Triangulos superiores no difiriesen de la superficie natural; pero si ni unos, ni otros se conforman con el Terreno; ésto es, que una Diagonal superior cae toda fuera, y la otra dentro

de

dè él, se hace evidente, que el Prisma quadrilatero irregular propuesto, tiene una solidéz intermedia entre los dos agregados de Prismas triangulares. Lo mismo se verifica en los demás Sólidos particulares, que componen el total; por consiguiente la Regla establecida se puede tomar, en todo caso, como proxima à la verdad, y con ventaja al méthodo vulgar del §. 88.

§. XCIV.

Hagase una comparacion entre los dos méthodos de aproximacion; y se hallará, que en el primero las Alturas particulares son arbitrarias, sin relacion entre sí las unas con las otras, y sin fundamento probable, paraque en los Prismas respectivos den la solidéz proxima à la verdad, cuya incertidumbre recae en la Altura média, ò comun para toda la Excavacion.

En el segundo, las mismas Alturas se situan en los Angulos de las Quadricu-

dricùlas, paraque el quarto de ellas, como Altura média, dé proximamente la solidéz de cada Prisma irregular, como un médio arithmético entre los dos Prismas triangulares mayores, y los dos menores, que en cada Quadricula pueden ocurrir de las dimensiones dadas; y de este buen orden èn las Alturas médias, resulta proxima à la verdad la Altura média comun à todo el espacio: añadiendose, que una misma Altura hace relacion à dos, ò quatro Quadriculas immediatas; y por consiguiente las 16 propuestas en el Egemplo, equivalen à 36, que es el quadruplo del número de las Quadriculas.

§. XCV.

Otra diferencia notable se reconoce; y es, que en la regla vulgar no se atiende à las particulares, ni à su situacion, sino al número, y à la suma de todas para la Altura média; de suerte, que si hay dos, ò mas Excavaciones de igual Base, pero de Altu-

se tendrá al Cociente 9 pies, por la Altura média comun à todas las Quadriculas; y multiplicando toda la Base 10800 por 9, se tendrá la misma solidéz 97200: en lugar, que la regla vulgar da solamente 94500 pies cúbicos.

Estas consideraciones hacen preferible el méthodo establecido * en los casos de aproximacion.

* §. 90.

§. XCVII.

De lo dicho * se infiere, que quando un Plano no pasa por los extremos de las 4 Alturas de los Angulos, ni los Triangulos superiores de los Prismas triangulares truncados se acomodan à la superficie del Terreno, el agregado de los dos Prismas mayores, como tambien el de los dos menores, pueden servir de aproximacion, haciendo el Cálculo de estos segun el §. 24. Así se tendrán las tres aproximaciones (suponiendo las Alturas, y Bases del §. 91) como se sigue.

* §. 93.

ALTU-

ALTURAS DE LOS PRISMAS MAYORES.

	Pies. Pulg$^{s.}$
$\frac{1}{6}(2A + E + 2F + B) =$	6..11
$\frac{1}{6}(2B + F + 2G + C) =$	7..11
$\frac{1}{6}(C + 2G + H + 2D) =$	8..11
$\frac{1}{6}(E + 2Y + K + 2F) =$	8.. 5
$\frac{1}{6}(F + 2K + L + 2G) =$	9.. 5
$\frac{1}{6}(2G + L + 2M + H) =$	10.. 5
$\frac{1}{6}(2Y + N + 2O + K) =$	8.. 8
$\frac{1}{6}(2K + O + 2P + L) =$	9.. 8
$\frac{1}{6}(L + 2P + Q + 2M) =$	10.. 8
	81.. 0

```
 1200
   81
 ----
 1200
9600
-----
97200
```

 ALTU-

ALTURAS DE LOS PRISMAS MENORES.

	Pies. Pulg^s.
$\frac{1}{6}(A + 2E + F + 2B) =$	6..10
$\frac{1}{6}(B + 2F + G + 2C) =$	7..10
$\frac{1}{6}(2C + G + 2H + D) =$	8..10
$\frac{1}{6}(2E + Y + 2K + F) =$	8.. 4
$\frac{1}{6}(2F + K + 2L + G) =$	9.. 4
$\frac{1}{6}(G + 2L + M + 2H) =$	10.. 4
$\frac{1}{6}(Y + 2N + O + 2K) =$	8.. 7
$\frac{1}{6}(K + 2O + P + 2L) =$	9.. 7
$\frac{1}{6}(2L + P + 2Q + M) =$	10.. 7
	80.. 3

1200
80..3
96000
300
96300

ALTURAS DEL SOLIDO MEDIO.

	Pies.	Pulgs.	Lins.
$\frac{1}{4}(A+B+E+F)=$	6..	10..	6
$\frac{1}{4}(B+F+G+C)=$	7..	10..	6
$\frac{1}{4}(C+G+H+D)=$	8..	10..	6
$\frac{1}{4}(E+Y+K+F)=$	8..	4..	6
$\frac{1}{4}(F+K+L+G)=$	9..	4..	6
$\frac{1}{4}(G+L+M+H)=$	10..	4..	6
$\frac{1}{4}(Y+N+O+K)=$	8..	7..	6
$\frac{1}{4}(K+O+P+L)=$	9..	7..	6
$\frac{1}{4}(L+P+Q+M)=$	10..	7..	6
	80..	7..	6

```
 1200
   80..7..6
 ----------
 96000
   700
    50
 -----
 96750
```

De

De suerte, que multiplicando la Base particular 1200 por cada suma de las Alturas médias, se hallará 97200 pies cúbicos por la mayor solidéz, 96300 por la menor, y 96750 por la média proximamente.

§. XCVIII.

El discernimiento para el buen uso de qualquiera de estas tres Reglas se hace à vista del Terreno mismo; pues algunas veces convendrán los Prismas mayores, otras los menores, y otras finalmente el Sólido médio arithmético; y aun entre las Quadriculas de una misma Excavacion, habrá algunas con relacion al Cálculo mayor, otras al mediano, y otras al menor.

Quando un mismo Plano pasa por los extremos de las 4 Alturas, los tres Cálculos dan una misma solidéz; porque $\frac{1}{6}(2A+E+2F+B)=\frac{1}{4}(A+E+F+B)$ $=\frac{1}{6}(A+2E+F+2B)$; y así en las demás Quadriculas, como se infiere de los §§. 25, 26, 27, y 28; pues en este caso

caso la suma de las Alturas diagonalmente opuestas, es igual à la suma de las otras dos; esto es, $A + F = E + B$,

§. XCIX.

Debiendose conformar la magnitud de las Bases particulares con la irregularidad del Terreno, puede suceder, que en una parte de la Excavacion se hallen mas desigualdades, que en otra; en este caso hay dos arbitrios: El primero es, hacer mas pequeñas las Quadriculas en donde se hallàre mas irregularidad, y algo mayores àzia la parte mas llana, calculando separadamente estas dos, ò mas porciones de la Excavacion: El segundo expediente es, considerar todo el Terreno de la misma especie, que la parte mas irregular, y hacer todas las Quadriculas iguales de una magnitud competente à las mayores desigualdades.

Por egemplo. Supongase, que el Terreno es de tres calidades: algo des-

desigual, mas aspero, y mucho mas irregular; y que para el primero, se juzguen de competente magnitud las Quadriculas de 1200 pies quadrados, para el segundo de 600, y para el tercero de 300: en cuyo caso se puede hacer un Cálculo separadamente para cada especie; ò tambien se pueden hacer todas las Quadriculas de 300 pies quadrados, que es el mejor arbitrio.

§. C.

El modo de aproximarse mas, y mas à la verdad, consiste en aumentar sobre la misma Base de la Excavacion el nũmero de los Perfiles, para hacer las Quadriculas tan pequeñas, como se quieran, tomando con el Nivel las Alturas en todos los Angulos; y si esta distribucion se hace de suerte, que las Quadriculas superiores no difieran sensiblemente de la superficie del Terreno, en este caso la regla de aproximacion pasará à serlo de exactitud; y la solidéz, que resulta

sulta de ella tan verdadera, como si se hubiera hallado por los méthodos explicados en la primera, y segunda Parte.

§. CI.

Considerando las diversas calidades de la Tierra, con relacion à la mayor, ò menor union de sus partes, y que en Excavaciones profundas no pueden mantenerse como se quisiera (pues faltandoles la suficiente Base à sustentarlas, se caen por sí mismas las que debian mantenerse en pie); conviene extender el Plano, y los Perfiles ázia el contorno de la Excavacion, para calcular separadamente estas Tierras, quando importáre esta circunstancia.

§. CII.

Ultimamente, en las grandes Excavaciones, que se egecutan por Asiento, se deben reconocer diariamente los Testigos, ò Damas, que se dejan para señalar las Alturas; porque la experiencia ha manifestado, que la

malicia, y el arte hacen crecer de la noche à la mañana estas Piramides, contra todas las Leyes de la Naturaleza, y de la Justicia: Pero se conoce luego el engaño, teniendo las nivelaciones sujetas à un punto firme del contorno, que ignoren los Interesados en semejantes alteraciones.

Estas Advertencias bastan para la Medicion, y Cálculo de qualquiera Excavacion, ò Desmonte. A muchos parecerán cansadas por el eſtilo, obscuras por el orden, y demasiadas por la materia, que no ha merecido la atencion de los Sabios.

Otros sentirán de diverso modo: Juzgarán, con mas fundamento, que se han escrito para dar luz à los poco instruídos, que deben concurrir à la Medicion, y Cálculo de estos cuerpos irregulares, con el fin de sacarlos de las dudas, y librarlos de caer en errores, è inconvenientes: Que para esto la explicacion debe ser la mas sencilla, y proporcionada à hacerse

cerse inteligible de todos: Que la buena instruccion consiste principalmente en el méthodo; y à este efecto se han dado primero las Reglas fundamentales para la exactitud, y por ellas venir en conocimiento de la aproximacion: Que el asunto es grave, quando se trata de grandes Obras, en que el gasto asciende alguna vez à millones.

Lo cierto es, que habiendo de concurrir à la Medicion, y Cálculo, Ingenieros, Ministros de la Real Hacienda, y Asentistas: à los primeros, no les dañará renovar la memoria de lo que ya saben: à los segundos, les será provechoso para intervenir con conocimiento al pago; y à los terceros, para el gobierno, y moderacion en sus pretensiones.

En fin, à todos convienen las Advertencias, las Prevenciones, y los Avisos; pues en las grandes Obras, que no se hacen por Administracion, nunca faltan discordias, inquietudes,

y Pleytos, que vienen à parar en el reconocimiento encargado à Sugetos, que obtienen con facilidad el titulo de Expertos, ò Perítos; los quales, para deponer con acierto, tienen mayor necesidad, que otros, de las Instrucciones, y Advertencias.

Barcelona, y Octubre 16. de 1766.

IMPRÍMASE.

De Irabien.

Lam. I.

